COMPITO SCRITTO di **ANALISI MATEMATICA I**,
CdS in Fisica e Astrofisica, 8 luglio 2019

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln(1 + e^{x}) - x;$$

(a) Determinare il suo dominio naturale D;
(b) determinare estremo superiore e inferiore di $f(x)$ in D;
(c) argomentare se f è una funzione invertibile o meno
(* facoltativo: trovare un'eventuale funzione inversa).

Esercizio 2. (a) Determinare il carattere del seguente integrale improprio, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sqrt{|\sin x|}}{(x^2+1)\ln^{\alpha}(x^2+1)}\, dx.$$

(b) Per i valori di α per cui converge calcolarne il valore.

Esercizio 3. Studiare la seguente successione definita per ricorrenza, valutando se ammette limite ed in caso affermativo calcolarne il valore:

$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_{n+1} = \cos(a_n). \end{cases}$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$a \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(2x)} - 2e^{\tan x} + (1 - \alpha x^2)}{\ln(1 + x^3) - \sin(\alpha x^4)}.$$

$$b \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{tg x} + (1 - \alpha x^2)}{\ln(1 + x^3) - \sin(\alpha x^4)}$$

— BOZZA di SOLUZIONI —

① $f(x) \doteq \ln(1+e^x) - x = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x})$

$\cdot\ D_f = \mathbb{R}$

$\cdot\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \sup_D f = +\infty$

$\cdot\ f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-1}{1+e^x}. \Rightarrow f'<0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f \searrow$

$\Rightarrow \inf_D f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

. essendo $f'<0$ in $\mathbb{R}$ si ha
$f \searrow$ strettamente in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f invertibile in $\mathbb{R}$: $\exists g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c.
$g(f(x)) = x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$
e $f(g(t)) = t\ \ \forall t\in\mathbb{R}$

$g(x) = -\ln(-1+e^x)$

② Oss: $f(x) \doteq \frac{x\sqrt{|\sin x|}}{(x^2+1)\ln^\alpha(x^2+1)}$. f è dispari $\Rightarrow$ analizzo l'andamento per $x\to+\infty$ per valutare anche $x\to-\infty$.

$x\to+\infty$ allora $\frac{x\sqrt{|\sin x|}}{(x^2+1)\ln^\alpha(x^2+1)} = O\left(\frac{2x}{(x^2+1)\ln^\alpha(x^2+1)}\right)$

considero $g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)\ln^\alpha(x^2+1)} = \begin{cases} \text{se } \alpha\neq1 \\ \frac{d}{dx}\left(\ln^{-\alpha+1}(x^2+1)\right)\frac{1}{(1-\alpha)} \\ \text{se } \alpha=1 \\ \frac{d}{dx}\ln(\ln(x^2+1)) \end{cases}$

quindi per $\xi\to+\infty$ $\int_a^\xi f(x)\,dx$ converge sse $-\alpha+1<0$ cioè $\alpha>1$

$x\to0$ allora $\frac{x\sqrt{|\sin x|}}{(x^2+1)\ln^\alpha(x^2+1)} = \sqrt{\frac{|\sin x|}{|x|}}\ \frac{\sqrt{|x|}\cdot x\cdot x^{-2\alpha}}{\frac{\ln^\alpha(x^2+1)}{x^{2\alpha}}}\ \frac{1}{(x^2+1)} = O\left(|x|^{\frac{3}{2}-2\alpha}\right)$

quindi per $\xi\to0^+$ $\int_\xi^a f(x)\,dx$ converge sse $\frac{3}{2}-2\alpha>-1$ sse $2\alpha<5/2$ sse $\alpha<5/4$

$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ conv sse $\boxed{1<\alpha<5/4}$

Per i valori di α per cui converge, essendo f dispari, vale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$.

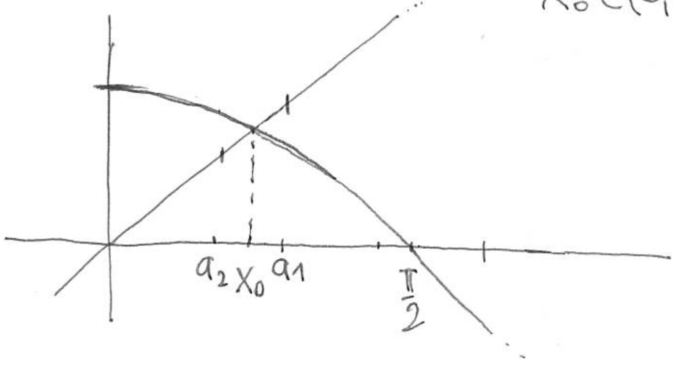
③ $\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_{n+1} = \cos(a_n) \end{cases}$

VA DIM! $g \in C^0([0, 2\pi])$ $g(0) = -1 < 0$, $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$ $\exists x_0 : g(x_0) = 0$
$g' = 1 + \sin x > 0 \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ INTERNO
$\Rightarrow g \nearrow \Rightarrow \exists! \, x_0$ RADICE per g.

- $f(x) \doteq \cos x$
- cerco punti fissi per f: $f(x) = x$ sse $\underbrace{x - \cos x}_{g(x) \doteq x - \cos x} = 0 \Rightarrow \exists! \, x_0$ t.c. $f(x_0) = x_0$ e $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$

ora: $a_1 = \cos 6 = 0{,}96$

$a_2 = \cos(0{,}96) = 0{,}57$
$a_3 = 0.83$ ...
$a_4 = 0.66$ ....



Nota: $g(0) = -1 < 0$

. $g(a_1) = 0{,}96 - \cos 0{,}96 = $
$= 0{,}96 - a_2 > 0$
$\Rightarrow x_0 < a_1$

. $g(a_2) = 0{,}57 - \cos 0{,}57 =$
$= 0{,}57 - a_3 < 0 \Rightarrow x_0 > a_2$

idea: $a_{2n+1} \searrow x_0$ e $a_{2n} \nearrow x_0$? da cui $\boxed{a_n \to x_0}$ ma è più complicato da dim!

Idea:
$\Rightarrow$ cerco un intervallo $\ni x_0$, che sia invariante tramite f cioè t.c. $f(I) \subseteq I$:
sia $I = [0, 1]$ allora poiché $0 \leq \cos x \leq 1 \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si ha $f(I) \subseteq I$.
inoltre $f'(x) = -\sin x$ quindi f è 1-lip. Mi occorre però f L-lip con $L < 1$
allora cerco un altro I: $I_1 = (a_2 ; a_1) = (0{,}57 ; 0{,}96)$ allora $f(I_1) \subseteq (\cos(a_1) ; \cos(a_2))$
cioè $f(I_1) \subseteq (0{,}57 ; 0.83) \subseteq I_1$

$\Rightarrow I_1 = (a_2 ; a_1)$ è invariante tramite f.

e $\forall x \in I_1$ si ha $|f'(x)| = |\sin x| < \sin a_1 = 0{,}57 \doteq L$

allora $|a_n - x_0| \underset{\substack{a_n = f(a_{n-1}) \\ x_0 = f(x_0) \text{ punto fix}}}{=} |f(a_{n-1}) - f(x_0)| \underset{f \text{ è L-lip.}}{<} L \, |a_{n-1} - x_0| = L \, |f(a_{n-2}) - f(x_0)| <$

$< L^2 |a_{n-2} - x_0| < \ldots < \underbrace{L^n}_{\substack{\downarrow \\ 0}} |a_0 - x_0|$ essendo $L < 1$

quindi $\lim_n a_n = x_0$.

④ ⓐ per $x \to 0$

$\left.\begin{aligned} e^{\sin 2x} &= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4) \\ 2e^{\operatorname{tg} x} &= 2 + 2x + x^2 + x^3 + o(x^3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{num} = (1-\alpha)x^2 - x^3 + o(x^3)$

[equiv. $\text{den} = \left(\frac{\ln(1+x^3)}{x^3} - \alpha x \frac{\sin(\alpha x^4)}{\alpha x^4}\right) x^3$]

$\left.\begin{aligned} \ln(1+x^3) &= x^3 + o(x^3) \\ \sin(\alpha x^4) &= \alpha x^4 + o(x^4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{den} = x^3 + o(x^3)$

$\Rightarrow \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{(1-\alpha)x^2 - x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} = -1 & \alpha = 1 \\ = +\infty & \alpha < 1 \\ = -\infty & \alpha > 1 \end{cases}$

ⓑ $\frac{num}{den} = \frac{\cancel{1}+2x+o(x)-(\cancel{1}+x+o(x))+1-\cancel{\alpha x^2}}{x^3+o(x^3)} \overset{\bar{e}\, o(x)}{=}$

$= \frac{1+x+o(x)}{x^3+o(x^3)} \longrightarrow ??$ $\underline{\text{oss}}$: $x \to 0$ significa $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$!!

oss: $\lim_{x\to 0^+} \frac{num}{den} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{num}{den} = -\infty$

$\Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(2x)} - e^{tg x} + (1-\alpha x^2)}{\ln(1+x^3)-\sin(\alpha x^4)}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$