COMPITO SCRITTO di **ANALISI MATEMATICA I**,
CdS in Fisica e Astrofisica, 16 settembre 2019

Esercizio 1. Determinare, se esistono, i valori del parametro alfa per i quali il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\cos x} - \mathrm{e}^{x^2+1} + x^3 + 1 - \cos \alpha x}{\mathrm{e}^{\sin\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{\tan\frac{x}{2}} + \alpha x^3},$$

esiste finito e calcolarne il valore.

Esercizio 2. Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{3^{\sqrt{x}} - \sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Esercizio 3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali; $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Stabilire la veridicità o la falsità delle seguenti affermazioni, dimostrandole o confutandole con degli esempi.

(a) $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_{n+1} - a_n)$ converge;

(b) se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge allora anche $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^4$ converge;

(c) se $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n)^{-1}$ converge allora $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge;

(d) se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge allora anche $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ converge.

Esercizio 4. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$, tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e f ha minimo locale in $x = 0$. Discutere il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\, dt.$$

per periodicità $t \doteq \frac{x}{2}$

$\boxed{\text{ES. 1.}}$ $\text{den} \doteq e^{\sin t} - e^{\operatorname{tg} t} + \alpha \underline{\underline{x^3}} = \underbrace{\frac{\operatorname{tg} t}{t}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\cos t - 1}{t^2}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^3}{8} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} t (\cos t + 1) + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 t (\cos^2 t + \cos t + 1)\right)}^{\to 1}$
$+ \alpha x^3 + \underline{\underline{o(x^3)}}$

$$= x^3 \left(\Theta \left(-\frac{1}{16}\right) + \alpha + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)$$

occorre sviluppare fino al 3° ordine!

$$\text{num} \doteq e^{\cos x} - e^{x^2+1} + x^3 + 1 - \cos \alpha x = x^2 \left[-\frac{e}{2} \frac{\sin^2 x}{x^2} - e + \frac{\alpha^2}{2} + \overbrace{x - e\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} x^2 + \frac{o(x^4)}{x^2}}^{= \Theta(x)} \right]$$

quindi $\dfrac{\text{num}}{\text{den}} = \dfrac{-\frac{e}{2} \frac{\sin^2 x}{x^2} - e + \frac{\alpha^2}{2} + \Theta(x)}{x \left(-\frac{1}{16} \Theta(1) + \alpha + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)}$ $\begin{matrix} \doteq \eta(x) \\ \doteq \delta(x) \end{matrix}$

ora: $\delta(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\eta(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\frac{e}{2} - e + \frac{\alpha^2}{2}$

quindi: se $\lim_{x \to 0^+} \eta(x) \neq 0$ cioè se $\alpha^2 \neq 3e$ si ha $\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{num}}{\text{den}} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ se $\alpha^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 3e$

se $\lim_{x \to 0^+} \eta(x) = 0$ cioè $\alpha^2 = 3e$ si ha $\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{num}}{\text{den}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\Theta(x)}{x(\ldots)}$

cioè $\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{num}}{\text{den}} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x - e x^2/2 + \alpha^4/24\, x^2 + o(x^4)/x^2}{x \left(-\frac{1}{16} \Theta(1) + \alpha + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)} =$

$= \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1 - e/2\, x + \alpha^4/24\, x + o(x^4)/x^3}{\underbrace{-\frac{1}{16} \Theta(1) + \alpha}_{\to \alpha - \frac{1}{16}} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \dfrac{1}{\alpha - \frac{1}{16}}$.

$\alpha - \frac{1}{16} \to \sqrt{3e} - \frac{1}{16}$ ✓
$\alpha - \frac{1}{16} \to -\sqrt{3e} - \frac{1}{16}$

$\boxed{\text{ES 2}}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{3^{\sqrt{x}} - \sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{è improprio} \\ \text{per } x \to 0^+}}{=} \lim_{\xi \to 0^+} \int_\xi^1 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} dx =$

$= \displaystyle\lim_{\xi \to 0^+} \int_\xi^1 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx - \int_\xi^1 x\, dx = \lim_{\xi \to 0^+} \frac{2}{\ln 3} \left(3 - 3^{\sqrt{\xi}}\right) - \frac{1}{2}(1 - \xi) = \frac{4}{\ln 3} - \frac{1}{2}$

$\displaystyle\int_\xi^1 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \underset{\substack{\uparrow \\ \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt}}{=} \int_{\sqrt{\xi}}^1 3^t dt = \int_{\sqrt{\xi}}^1 2 e^{\ln 3 \cdot t} dt = 2 \frac{e^{\ln 3 \cdot t}}{\ln 3} \Bigg|_{\sqrt{\xi}}^1 = \frac{3 - 3^{\sqrt{\xi}}}{\ln 3} \cdot 2$

$\displaystyle\int_\xi^1 x\, dx = \frac{x^2}{2} \Bigg|_\xi^1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$

$\boxed{\text{ES.3}}$ ⓐ Ⓕ controesempio: $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ⓑ Ⓥ se $\sum a_n$ conv allora $a_n \to 0$ quindi $\exists N_0 : \forall n > N_0 \ a_n < \frac{1}{2}$ con $0 < a_n$.
da cui $0 < a_n^4 < a_n$. per il criterio del confronto per serie a termini positivi segue $\sum a_n^4$ conv.

ⓒ Ⓥ se $\sum \frac{1}{a_n}$ conv allora $\frac{1}{a_n} \to 0$ quindi $a_n \to +\infty$ quindi $\sum a_n$ non conv ed essendo $a_n \geq 0$ necessariamente $\sum a_n$ div.

ⓓ Ⓥ se $\sum a_n$ converge, con $a_n > 0$ si ha $\sum |(-1)^n a_n| = \sum |a_n| = \sum a_n$ converge
cioè $\sum (-1)^n a_n$ conv. assolutamente
$\Longrightarrow \sum (-1)^n a_n$ converge.

$\boxed{\text{ES 4}}$. f ha MIN loc per $x=0$, $f \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f'(0) = 0$, $f(0) = m \begin{cases} m = 0 \\ m > 0 \end{cases}$

ora: $\int_0^x f(t) e^t \, dt \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ essendo $f \in C^0([0,x]) \ \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi limitata in $[0,x] \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x f(t) e^t \, dt \overset{\text{TEO MEDIA}}{=} x \cdot f(\xi) e^{\xi} \qquad \exists \xi \in (0,x) \text{ cioè } 0 < \xi < x$$

$f(\xi) \to f(0)$ essendo f cont. e $\xi \to 0$

quindi se $f(0) \neq 0$ si ha $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) e^t dt = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(\xi) \overbrace{e^{\xi}}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = +\infty$

se invece $f(0) = 0$

allora sviluppo in serie (SI PUÒ FARE. perché?) $\int_0^x f(t) e^t dt = 0 + \underbrace{\cancel{f(0)}}_{=0} x + \Big(\underbrace{f'(0)}_{=0} + \underbrace{\cancel{f(0)}}_{=0}\Big) \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

da cui $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x f(t) e^t dt}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0.$$