4. – Soluzione degli esercizi su: ***permutazioni su un insieme finito***.

Esercizio 4.1

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 3 & 8 & 2 & 6 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 2)(3\ 7\ 4\ 5\ 6) = (1\ 2)(3\ 7)(3\ 4)(3\ 5)(3\ 6)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 5 trasposizioni, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.2

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 5 & 9 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 2 & 9 & 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(6\ 7\ 8) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(6\ 7)(6\ 8)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 5 trasposizioni, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.3

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 3 & 2 & 1 & 9 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 2 & 9 & 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Calcoliamo σ scrivendola direttamente come prodotto di cicli disgiunti:

$$\sigma = (1\ 9\ 6\ 7\ 3\ 2\ 4)(5\ 8)\,.$$

Scriviamo adesso σ come prodotto di trasposizioni::

$$(1\ 9)(1\ 6)(1\ 7)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 4)(5\ 8)\,.$$

Poichè abbiamo scritto σ come prodotto di 7 trasposizioni, e 7 è un numero dispari, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.4

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\mathbf{X} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Se esiste una permutazione τ tale che $\sigma\tau = \tau\sigma = \mathbf{id}_{\mathbf{X}}$, si scriva τ come prodotto di cicli disgiunti.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 9 & 1 & 5 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 6\ 5)(2\ 4\ 9\ 8\ 7) = (1\ 6)(1\ 5)(2\ 4)(2\ 9)(2\ 8)(2\ 7)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 6 trasposizioni, σ è una permutazione pari. La permutazione τ descritta nella domanda è l'inversa di σ nel gruppo $S_{\mathbf{X}}$, quindi esiste certamente: si ha

$$\tau = (1\ 5\ 6)(2\ 7\ 8\ 9\ 4)\,.$$

Esercizio 4.5

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 9 & 1 & 4 & 7 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 8 & 4 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 8\ 4\ 3\ 5\ 2\ 6)(7\ 9) = (1\ 8)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 5)(1\ 2)(1\ 6)(7\ 9)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 7 trasposizioni, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.6

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 3 & 8 & 5 & 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 8 & 1 & 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 8 & 4 & 5 & 2 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 6\ 2)(3\ 8\ 9\ 7) = (1\ 6)(1\ 2)(3\ 8)(3\ 9)(3\ 7)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 5 trasposizioni, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.7

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 3 & 2 & 1 & 9 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Calcoliamo σ scrivendola direttamente come prodotto di cicli disgiunti:

$$\sigma = (1\ 3)(2\ 4\ 9\ 6\ 7\ 5\ 8)\,.$$

Scriviamo adesso σ come prodotto di trasposizioni::

$$(1\ 3)(2\ 4)(2\ 9)(2\ 6)(2\ 7)(2\ 5)(2\ 8)\,.$$

Poichè abbiamo scritto σ come prodotto di 7 trasposizioni, e 7 è un numero dispari, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.8

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\mathbf{X} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 8 & 4 & 9 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Se esiste una permutazione τ tale che $\sigma\tau = \tau\sigma = \mathbf{id}_{\mathbf{X}}$, si scriva τ come prodotto di cicli disgiunti.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 9\ 5)(2\ 6\ 8\ 4\ 3) = (1\ 9)(1\ 5)(2\ 6)(2\ 8)(2\ 4)(2\ 3)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 6 trasposizioni, σ è una permutazione pari. La permutazione τ descritta nella domanda è l'inversa di σ nel gruppo $S_{\mathbf{X}}$, quindi esiste certamente: si ha

$$\tau = (1\ 5\ 9)(2\ 3\ 4\ 8\ 6)\,.$$

Esercizio 4.9

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 2 & 1 & 7 & 4 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 4 & 9 & 3 & 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 7\ 4\ 8\ 3\ 5)(2\ 6\ 9) = (1\ 7)(1\ 4)(1\ 8)(1\ 3)(1\ 5)(2\ 6)(2\ 9)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 7 trasposizioni, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.10

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 8 & 5 & 1 & 9 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 4 & 5 & 2 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 6\ 2)(3\ 7\ 9\ 8) = (1\ 6)(1\ 2)(3\ 7)(3\ 9)(3\ 8)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 5 trasposizioni, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.11

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 3 & 2 & 1 & 9 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Calcoliamo σ scrivendola direttamente come prodotto di cicli disgiunti:

$$\sigma = (1\ 7\ 3\ 2\ 4\ 5\ 8)(6\ 9)\,.$$

Scriviamo adesso σ come prodotto di trasposizioni::

$$(1\ 7)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 4)(1\ 5)(1\ 8)(6\ 9)\,.$$

Poichè abbiamo scritto σ come prodotto di 7 trasposizioni, e 7 è un numero dispari, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.12

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\mathbf{X} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 2 & 8 & 6 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Se esiste una permutazione τ tale che $\sigma\tau = \tau\sigma = \mathbf{id}_{\mathrm{X}}$, si scriva τ come prodotto di cicli disgiunti.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & 4 & 2 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 6\ 2)(3\ 7\ 9\ 5\ 4) = (1\ 6)(1\ 2)(3\ 7)(3\ 9)(3\ 5)(3\ 4)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 6 trasposizioni, σ è una permutazione pari. La permutazione τ descritta nella domanda è l'inversa di σ nel gruppo S_{X}, quindi esiste certamente: si ha

$$\tau = (1\ 2\ 6)(3\ 4\ 5\ 9\ 7)\,.$$

Esercizio 4.13

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 5 & 2 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 5 & 8 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 9)(2\ 6\ 3\ 4\ 5) = (1\ 9)(2\ 6)(2\ 3)(2\ 4)(2\ 5)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 5 trasposizioni, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.14

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 2 & 5 & 9 & 1 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 9 & 7 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Si ha

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 8 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 2\ 4\ 3)(6\ 8\ 7) = (1\ 2)(1\ 4)(1\ 3)(6\ 8)(6\ 7)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 5 trasposizioni, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.15

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 3 & 2 & 1 & 9 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Soluzione – Calcoliamo σ scrivendola direttamente come prodotto di cicli disgiunti:

$$\sigma = (1\ 4)(2\ 9\ 6\ 7\ 3\ 5\ 8)\,.$$

Scriviamo adesso σ come prodotto di trasposizioni::

$$(1\ 4)(2\ 9)(2\ 6)(2\ 7)(2\ 3)(2\ 5)(2\ 8)\,.$$

Poichè abbiamo scritto σ come prodotto di 7 trasposizioni, e 7 è un numero dispari, σ è una permutazione dispari.

Esercizio 4.16

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\mathbf{X} \coloneqq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \beta \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 9 & 4 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β.

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

Se esiste una permutazione τ tale che $\sigma\tau = \tau\sigma = \mathbf{id}_{\mathbf{X}}$, si scriva τ come prodotto di cicli disgiunti.

Soluzione – Si ha

$$\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 2 & 8 & 4 & 1 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\sigma = (1\ 9\ 6)(2\ 5\ 4\ 8\ 3) = (1\ 9)(1\ 6)(2\ 5)(2\ 4)(2\ 8)(2\ 3)\,.$$

Poiché σ si scrive come prodotto di 6 trasposizioni, σ è una permutazione pari. La permutazione τ descritta nella domanda è l'inversa di σ nel gruppo $\mathrm{S}_{\mathbf{X}}$, quindi esiste certamente: si ha

$$\tau = (1\ 6\ 9)(2\ 3\ 8\ 4\ 5)\,.$$