Esercizi IAS-foglio 2

(Prof.ssa D. Bubboloni) 14 ottobre 2019

1. Sia G un gruppo. Provare che se $H \leq G$, la chiusura normale di H in G coincide con il minimo sottogruppo normale in G contenente H.

2. Dimostrare il seguente teorema: Sia G un gruppo e siano $H, K \leq G$. Si ha $G = H \times K$ se e solo sono verificate entrambe le seguenti condizioni:

a) ogni elemento g di G si scrive in modo unico $g = hk$ con $h \in H$ e $k \in K$ (unicita' di scrittura);

b) $\forall h \in H, \forall k \in K$, $hk = kh$. (permutabilita' elemento a elemento fra H e K).

3. Sia G un gruppo e $N \trianglelefteq G$. Provare che N ammette un complemento se e solo se esiste un sistema S di rappresentanti dei laterali di N in G tale che $S \leq G$.

4. Sia G un gruppo finito. Provare che se $|G| \geq 3$, allora $|\mathrm{Aut}(G)| \geq 2$.

5. Determinare il massimo ordine di un elemento di S_{12}.
Suggerimento: Ricordare che $|\sigma|$ e' il minimo comune multiplo dei termini in T_σ.

6. Si ricordi che se G e' un gruppo, un sottogruppo M di G si dice massimale se $M \neq G$ e $M \leq H \leq G$ implica $H = M$ o $H = G$.
Mostrare che un sottogruppo massimale non puo' avere esattamente due coniugati.
Suggerimento: si sfrutti il fatto che il numero dei coniugati di un sottogruppo K di G e' dato dall'indice del suo normalizzante.

7. Sia G un gruppo. Provare che se $H \leq G$, il core di H coincide con il prodotto di tutti i normali in G inclusi in H.

9. Provare che $a + n\mathbb{Z}$ e' invertibile nell'anello $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se e solo se $(a, n) = 1$.

10. Determinare il minimo $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathrm{Aut}(C_n)$ non sia ciclico e individuarne la struttura. Trovarne un sistema di generatori.

11. Determinare $|\mathrm{Aut}(C_6 \times C_7)|$ e dire se $\mathrm{Aut}(C_6 \times C_7)$ risulta ciclico.

12. Provare che in un gruppo finito G, il numero degli elementi di G di ordine n e' divisibile per $\varphi(n)$. Dedurne che il numero di elementi di ordine 3 in G e' pari, eventualmente 0.

13. Provare che $C_4 \times \mathbb{Z}$ e' abeliano non ciclico.

14. Determinare $N_{S_7}(\langle(1234567)\rangle)$ e $C_{S_7}(\langle(1234567)\rangle)$.