PRIMA PROVA PARZIALE di ANALISI I,
CdS in Fisica e Astrofisica, 11 Novembre 2019

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} \ t.c. \ \exists (x,y) \in D, a = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy} \right\},$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c. \ x^2 + y^2 \leq 5, (x,y) \neq (0,0)\}.$$

(a) Stabilire se A è un insieme limitato o illimitato.
(b) Determinare l'estremo inferiore di A, specificando se è assunto.
(c) Provare che $\sup A \leq \frac{1}{2}$.
(d) Determinare l'estremo superiore di A, specificando se è assunto.

Esercizio 2. Si consideri la successione

$$a_n = \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{\cos 3}.$$

(a) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (a_n)^\alpha.$$

(b) Specificare di che tipo di convergenza si tratta.

Esercizio 3. Utilizzando la definizione di limite, si verifichi che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 3 - \sin x \cos(x+3)}{x^2 - 3} = 1.$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - \left(1 + \alpha \mathrm{e}^x - \cos x\right)^{\sin 1} (1 + x^2).$$

(a) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione è ben definita in un intorno di $x = 0$.
(b) Stabilire per quali di tali α la funzione è infinitesima in $x = 0$.
(c) Per i valori trovati al punto (b) stabilire qual è il più grande ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \to 0$.