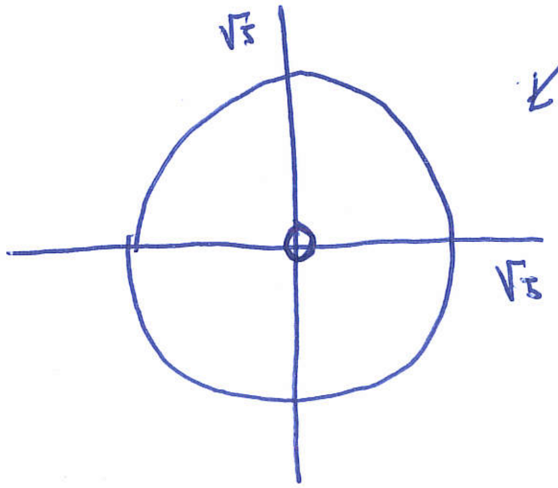
$\boxed{\text{EX 1}}$

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in D \quad a = \frac{xy}{x^2+y^2+xy} \right\}$$

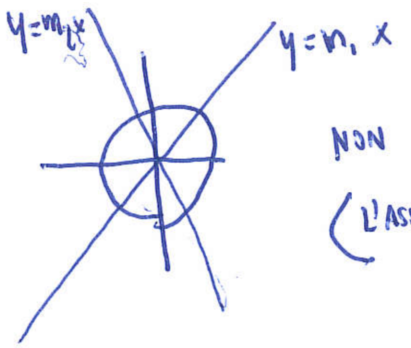
con $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \quad x^2+y^2 \leq 5 \quad (x,y) \neq (0,0) \right\}$

LO MANDEREMO VIA!



$\boxed{\text{MODO FACILE}}$ SE $y = mx$ (SU RETTE) $\quad a = \dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2+mx^2} = \dfrac{m}{1+m^2+m}$

COSTANTE SU RETTE ! (GIÀ VISTO)



NON MI FREGA NIENTE DEL CERCHIO
(L'ASSE y NON LO TROVO, MA SO CHE LÌ VALE 0)

STUDIO $\varphi(m) = \dfrac{m}{1+m^2+m}$ $\qquad \varphi(0) = 0$

$$\lim_{m \to \pm\infty} \varphi(m) = 0$$

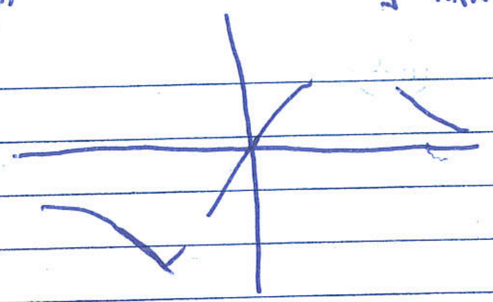
$m \; \varphi(m) > 0$

LA RETTA TENDE A ASSE y

MA MI SONO SVINCOLATO DALLE RETTE

(2)

$\varphi(m)$ $\quad \exists$ MAX $\Rightarrow$ A LIMITATO!



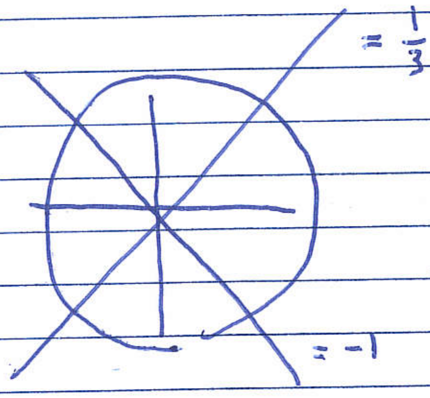
$\exists$ MIN

BONUS:
$\Rightarrow$ SO CHE SUP = MAX
INF = MIN

CHI SONO? DERIVO (MA LI POSSO TROVARE ANCHE CON LE MANI)

$$\varphi'(m) = \frac{1-m^2}{(1+m+m^2)^2} \Rightarrow \begin{array}{ll} m=1 & \text{MAX} \\ m=-1 & \text{MIN} \end{array}$$

$\varphi(1) = \frac{1}{3}$ $\quad \varphi(-1) = -1$



E SE NON DERIVO? O SE NON USO $y = mx$?

$\boxed{\text{MODO STANDARD}}$ STUDIO $\dfrac{xy}{x^2+y^2+xy}$

$\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2+xy}\right| \leq 1$ VIENE DA (1) $x^2+y^2+xy > 0$

BANALE SE $xy > 0$

SE $xy < 0$

$x^2+y^2+2xy > xy$

$(x+y)^2 \geq 0 > xy$

(2) $x^2+y^2+xy > |xy|$

$x^2+y^2 > |xy| - xy$

$= 0$ SE $xy > 0$

$= -2xy$ $\quad xy < 0$

F.I.R. ITALIA
C.N.AR.
COMMISSIONE
NAZIONALE
ARBITRI

3

(NB: LO VEDEVO FACILMENTE ANCHE STUDIANDO $\dfrac{m}{m^2+m+1}$)

VISTO CHE SE $y=-x$ ($m=-1$, MA VA?)

VEDO A OCCHIO CHE

$$\frac{xy}{x^2+y^2+xy}=\frac{1}{-1}=-1 \quad \text{ECCO I PTI DI MIN ASS}$$

E I MAX ASS? VEDO A OCCHIO, SO CHE SE $x=y$ ($m=1$ MA VA?)

$$\frac{xy}{x^2+y^2+xy}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3} \quad \text{SE PROVO}$$

$$\frac{xy}{x^2+y^2+xy}\le\frac{1}{3} \quad \text{IN } xy\ge 0 \quad \text{HO VINTO}$$

(IN $xy<0$ HO VALORI NEGATIVI)

$\Downarrow$

$$3xy \le x^2+y^2+xy \quad \text{E HO VINTO}$$

$$x^2+y^2-2xy\ge 0$$

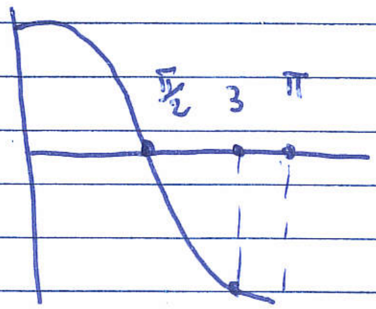
F.I.R. ITALIA
C.N.AR.
COMMISSIONE
NAZIONALE
ARBITRI

EX 2

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\cos 3} = a_n$$

DA STUDIARE $\sum (-1)^n a_n^{\alpha}$ AL VARIARE $\alpha \in \mathbb{R}$

FATTI: $n \to \infty$ $\quad \cos\frac{1}{n} \to 1$ MA $\cos\frac{1}{n} < 1$



$\cos\frac{1}{n} \nearrow$ $\quad \cos 3 < 0$

$\Rightarrow \left(1-\cos\frac{1}{n}\right) > 0 \quad \downarrow$

$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\cos 3} > 0 \quad \downarrow$

$a_n \to 0$ $\quad a_n = \underset{\downarrow \atop 0}{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)} \underset{\downarrow \atop 1}{\left(\cos\frac{1}{n}\right)}^{\cos 3}$

SE $\alpha \leq 0$ $\quad |a_n^{\alpha}| \not\to 0 \Rightarrow \sum$ NON CONVERGE E DIVERGE (ASSOL)

$\alpha > 0$ $\quad a_n \downarrow, \; a_n \geq 0, \; a_n \to 0 \Rightarrow \sum$ CONVERGE (LEIBNITZ)

MA NON HO FINITO. COSA FA $\sum a_n^{\alpha}$ (CONV. ASSOLUTA)

$$a_n^{\alpha} = \underbrace{\cancel{\left(\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right)^{\alpha}}}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{n^{2\alpha}} \underbrace{\cancel{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\alpha\cos 3}}}_{1} \Rightarrow \text{"VIAGGIA" COME } \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

$2\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{2}$

CONV. ASSOLUTA

$0 < \alpha \leq 1/2$ $\quad \sum$ CONV MA NON CONV ASS.

F.I.R.
ITALIA
C.N.AR.
COMMISSIONE
NAZIONALE
ARBITRI

Ex 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 3 - \sin x \cos(x+3)}{x^2 - 3} = 1$$

DA TROVARE $\delta(\varepsilon)$ t.c.

$$\left| \frac{3x^2 - 3 - \sin x \cos(x+3)}{x^2 - 3} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{3x^2 - 3 - \sin x \cos(x+3) - x^2 + 3}{x^2 - 3} \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{2x^2}{x^2 - 3} \right|}_{A} + \underbrace{\left| \frac{\sin x \cos(x+3)}{x^2 - 3} \right|}_{B} < \varepsilon$$

LAVORO (B) $\left| \frac{\sin x \cos(x+3)}{x^2 - 3} \right| \leq \left| \frac{\sin x}{x^2 - 3} \right| \leq \frac{|x|}{|x^2 - 3|}$

DA DIMOSTRARE $\left| \frac{2x^2}{x^2 - 3} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ E $\frac{|x|}{|x^2 - 3|} < \frac{\varepsilon}{2}$

(1) VIA "FACILE" SE $|x| < 1$ $(\Rightarrow \delta_1 = 1)$

$|x^2 - 3| = 3 - x^2 > 2 \Rightarrow \left| \frac{2x^2}{x^2 - 3} \right| < x^2$ E $\frac{|x|}{|x^2 - 3|} < \frac{|x|}{2}$

HO FINITO! $x^2 < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, $\frac{|x|}{2} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x| < \varepsilon$

$\delta = \min\left(1, \varepsilon, \sqrt{\varepsilon/2}\right) = \varepsilon$ ☺

F.I.R. ITALIA
C.N.AR.
COMMISSIONE
NAZIONALE
ARBITRI

(2) VIA "CONTOSA" $\left|\dfrac{2x^2}{x^2-3}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

OSSERVO CHE SE $x \to 0$ (BASTA $|x| < \sqrt{3}$) $x^2-3 < 0$

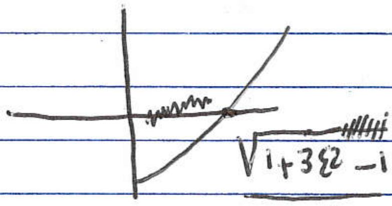
$\left|\dfrac{2x^2}{x^2-3}\right| = \dfrac{2x^2}{3-x^2}$ $\quad 0 < \dfrac{2x^2}{3-x^2} < \varepsilon/2 \Rightarrow 2x^2 < \dfrac{3}{2}\varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{2}x^2$

$\Rightarrow \left(2+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)x^2 - \dfrac{3}{2}\varepsilon < 0 \Rightarrow |x| < \sqrt{\dfrac{3\varepsilon}{4+\varepsilon}}$

PIÙ DELICATO $\dfrac{|x|}{|x^2-3|} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. COME PRIMA $\dfrac{|x|}{|x^2-3|} = \dfrac{|x|}{3-x^2}$

$\boxed{x>0}$ $\quad x < \dfrac{3}{2}\varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{2}x^2 \qquad \varepsilon/2\, x^2 + x - \dfrac{3}{2}\varepsilon < 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+3\varepsilon^2}}{\varepsilon}$



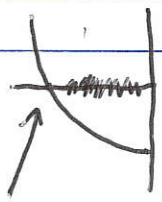
$\dfrac{\sqrt{1+3\varepsilon^2}-1}{\varepsilon}$

MA $\dfrac{\sqrt{1+3\varepsilon^2}-1}{\varepsilon}$ VA A ZERO SE $\varepsilon \to 0$? SÌ

$\dfrac{\sqrt{1+3\varepsilon^2}-1}{\varepsilon} = \dfrac{3\varepsilon^2}{\varepsilon\left(\sqrt{1+3\varepsilon^2}+1\right)} \to \dfrac{3}{2}\varepsilon$

$\boxed{x<0}$ $\quad x > -\dfrac{3}{2}\varepsilon + \dfrac{\varepsilon}{2}x^2 \qquad \dfrac{\varepsilon}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2}\varepsilon < 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+3\varepsilon^2}}{\varepsilon}$



$\dfrac{1-\sqrt{1+3\varepsilon^2}}{\varepsilon} \to -\dfrac{3}{2}\varepsilon$

F.I.R. ITALIA
C.N.AR.
COMMISSIONE
NAZIONALE
ARBITRI

Ex 4 $\quad f(x) = 1 - \left(1 + \alpha e^{x} - \cos x\right)^{\sin 1} \left(1 + x^2\right)$

$f(0) = 1 - \alpha^{\sin 1}$ DEFINITO SOLO SE $\boxed{\alpha \geq 0}$

PER TALI VALORI f È CONTINUA. PER ESSERE INFINITESIMA DEVE ESSERE $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

PIÙ DELICATO STUDIARE L'ORDINE DI INFINITESIMO
(CON CHE VELOCITÀ "VIAGGIA"?)

$$f(x) = 1 - \left(1 - \cos x + e^{x}\right)^{\sin 1} \left(1 + x^2\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \cos x + e^{x}\right)^{\sin 1} - x^2 \left(1 - \cos x + e^{x}\right)^{\sin 1}$$

PASSO FORMA ESPONENZIALE

$$1 - e^{\sin 1 \ln\left(1 - \cos x + e^{x}\right)} - \underbrace{x^2 e^{\sin 1 \ln\left(1 - \cos x + e^{x}\right)}}$$

LAVORO QUESTO

$$\frac{1 - e^{\sin 1 \ln\left(1 - \cos x + e^{x}\right)}}{\sin 1 \ln\left(1 + \cos x + e^{x}\right)} \sin 1 \ln(\,)$$

$\to -1$

PASSO SEMPLIFICARE, È MOLTIPLICATIVO

RIMANE QUINDI $\mathcal{O}(-1) \sin 1 \ln\left(1 - \cos x + e^{x}\right)$

LAVORO LUI

"VIAGGIA" COME x^2

INFATTI $1 - \cos x + e^{x} \to 1$

$\ln\left(1 - \cos x + e^{x}\right) \to 0$

$e^{\sin 1 \cdot \ln\left(1 - \cos x + e^{x}\right)} \to 1$

QUINDI È UN $\mathcal{O}(x^2)$

O SE PREFERITE $x^2 \mathcal{O}(1)$

F.I.R.® ITALIA
C.N.AR.
COMMISSIONE
NAZIONALE
ARBITRI

$$\ln\left(1-\cos x+e^{x}\right) = \underbrace{\frac{\ln\left(1-\cos x+e^{x}\right)}{-\cos x+e^{x}}}_{\to 1}\left(-\cos x+e^{x}\right)$$

HO QUASI FINITO!

$$e^{x}-\cos x = \left(\underbrace{\frac{e^{x}-1}{x}}_{\to 1}+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{\to 0}\right)x$$

$$e^{x}-\cos x \to x$$

$$f(x) = O(-\sin 1)\,x - x^{2}\,O(1)$$

$$\frac{f(x)}{x} \to \text{COSTANTE} \Rightarrow f(x) = O(x)$$

INFINITESIMO DI ORDINE 1

F.I.R.
ITALIA
C.N.AR.
COMMISSIONE
NAZIONALE
ARBITRI