Programma consuntivo di “Complementi di Algebra”

relativo alle lezioni svolte dal prof. Marco Barlotti nell’Anno accademico 2019-2020

La teoria degli insiemi nella assiomatizzazione di Zermelo e Fraenkel. L’assioma di Leibniz. L’assioma di estensione. L’assioma di separazione e il paradosso di Russell. L’assioma delle coppie, l’assioma di regolarità e l’assioma dell’unione. L’assioma dei sottoinsiemi. Coppie ordinate. Prodotto cartesiano. L’assioma dell’infinito. Numeri naturali. Transitività. Gli assiomi di Peano. Dimostrazioni per induzione. Funzioni definite ricorsivamente. Somma e prodotto di numeri naturali. L’ordinamento dei numeri naturali; confronto con la definizione di Peano. Numeri interi relativi. Numeri razionali. Incommensurabilità tra lato e diagonale di un quadrato: una dimostrazione geometrica.

Tre enunciati equivalenti per l’assioma della scelta. Il principio del buon ordinamento come conseguenza del lemma di Zorn, e l’assioma della scelta come conseguenza del principio del buon ordinamento. Il lemma di Zorn come conseguenza dell’assioma della scelta. Dimostrazione che ogni spazio vettoriale ha una base. Insiemi ben fondati: definizione e prime proprietà. Il principio generalizzato di induzione. Altre proprietà degli insiemi ben fondati e degli insiemi bene ordinati. Cenni sui numeri ordinali. Supporre che ogni funzione suriettiva abbia un’inversa destra equivale all’assioma della scelta. L’equazione di Cauchy $\mathbf{f}(x+y)=\mathbf{f}(x)+\mathbf{f}(y)$: quali sono le soluzioni continue; esempi di soluzioni non continue.

Cardinalità: definizione di equipotenza e primi risultati. Tutti i numeri naturali hanno cardinalità a due a due distinte. Un insieme è infinito sse è equipotente a un suo sottoinsieme proprio. Una condizione sufficiente affinché un insieme infinito sia numerabile: applicazione a Z, a Q, all’insieme dei numeri algebrici. L’insieme dei sottoinsiemi finiti di N è numerabile. Il prodotto cartesiano di insiemi numerabili è numerabile. Confronto fra cardinalità: il teorema di Schroeder-Bernstein-Cantor; comunque presi due insiemi, uno dei due è suvvalente all’altro; ogni insieme è strettamente suvvalente all’insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Cardinalità dell’unione e del prodotto cartesiano di insiemi infiniti. Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità. L’insieme dei sottoinsiemi infiniti di N ha la cardinalità del continuo.

Osservazioni sull’equisezionabilità dei poligoni e dei poliedri. La soluzione del terzo problema di Hilbert (teorema di Dehn): un tetraedro e un cubo dello stesso volume non sono equisezionabili. Equiscomponibilità. Un utile criterio di equiscomponibilità: il teorema di Banach-Tarski-Schroeder-Bernstein-Cantor. Gruppi liberi. Equiscomponibilità tra il gruppo libero su due generatori e due copie dello stesso. Un gruppo libero di rotazioni della sfera. Il teorema di Banach e Tarski.

Questa parte del programma corrisponde al contenuto degli “Appunti di Teoria degli Insiemi” disponibili nella pagina e-learning dell’insegnamento (vers. 1.81 o successiva) con esclusione delle sezioni 2.13 e 3.11. Vanno omesse anche le dimostrazioni dei lemmi 6.7.1 e 6.7.2 e del teorema 6.7.3 .

Costruzioni con riga e compasso. Numeri euclidei. L'insieme dei numeri euclidei è un campo chiuso rispetto all'estrazione di radice quadrata; sua caratterizzazione. Applicazioni: la rettificazione della circonferenza, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo non si possono effettuare con riga e compasso.

Trisezione dell'angolo e duplicazione del cubo con riga graduata e compasso. Trisezione dell'angolo e rettificazione della circonferenza mediante la curva di Ippia.

Costruzione con riga e compasso dei punti delle coniche e delle tangenti alle coniche.

Questa parte del programma corrisponde al contenuto degli "Appunti sulle costruzioni con riga e compasso" disponibili nella pagina e-learning dell'insegnamento (vers. 0.95 o successiva) con esclusione delle sezioni 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6.

Prime costruzioni col piegamento della carta: la divisione di un segmento in n parti uguali. Costruzioni secondo Talete; numeri di Pitagora, numeri di Euclide, numeri di Huzita e costruzioni associate. La trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo piegando la carta.

Il modulo a 90° e la costruzione modulare del cubo. Il modulo a 60° e la costruzione modulare del tetraedro regolare e dell'ottaedro regolare.

Questa parte del programma corrisponde al contenuto dei seguenti documenti disponibili in formato pdf nella pagina e-learning dell'insegnamento:
"Dividere un segmento in parti uguali";
"Appunti sulle costruzioni piegando la carta" (vers. 0.5 o successiva);
"Origami - Un approccio matematico" (tesi di Ruggero Livi, limitatamente all'enunciato dei principali risultati);
"Modulo a 60 gradi" (di Luisa Canovi);
"Modulo a 90 gradi" (di Luisa Canovi);
"Una costruzione non modulare del cubo" (di Luisa Canovi).