

## METODI DI ANALISI DI STRUTTURE IN ZONA SISMICA

I metodi di analisi delle strutture in zona sismica possono essere di tipo lineare e non lineare, statica e dinamica. In relazione a ciò, vengono classificati come segue:

1. analisi statica lineare;
2. analisi statica non lineare;
3. analisi dinamica lineare;
4. analisi dinamica non lineare.

La principale differenza fra i primi due metodi ed i restanti sta nel fatto che l'equilibrio viene trattato staticamente nei casi 1. e 2. (ovvero applicando al modello strutturale sistemi di forze equivalenti simulanti gli effetti dell'azione sismica), dinamicamente nei 3. e 4. (ovvero per sovrapposizione modale o per integrazione diretta delle equazioni del moto).

### 1. ANALISI STATICA LINEARE

L'uso dell'analisi statica equivalente è motivato dall'osservazione di seguito commentata in relazione ad un semplice portale, riprodotto dinamicamente un sistema ad un solo grado di libertà, ma facilmente estendibile anche a sistemi più complessi.

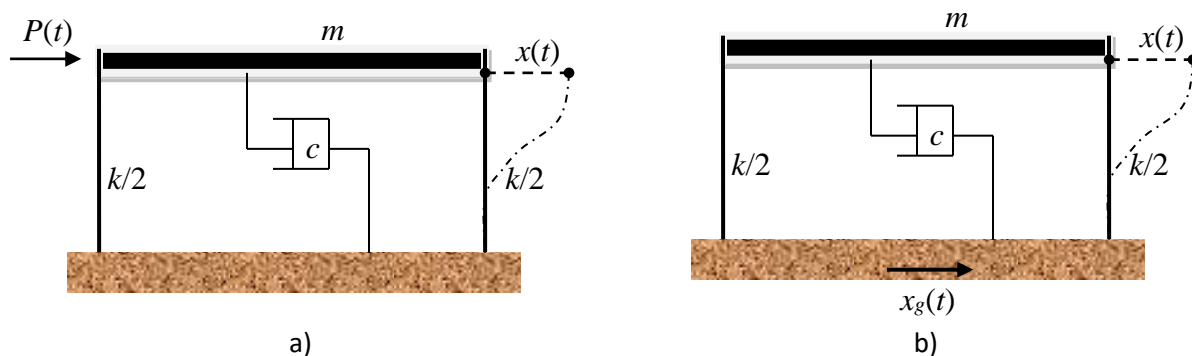


Figura 1 – Schema di rappresentazione di un portale soggetto ad una forza variabile nel tempo agente a livello dell'impalcato (a) e ad un'azione sismica (b)

In Figura 1 vengono mostrati due casi in cui uno stesso portale venga sollecitato dall'azione di una forza generica  $P(t)$ , agente sul traverso di massa  $m$ , oppure da uno spostamento impresso come quello indotto da un segnale sismico. Le equazioni del moto che ne definiscono la risposta sono le seguenti:

$$\text{Caso di forza esterna applicata: } m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = P(t)$$

$$\text{Caso di sisma: } m\ddot{x}_r(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Nella seconda situazione, per  $\ddot{x}_r(t)$  si è inteso rappresentare l'accelerazione assoluta determinante la componente inerziale che entra in gioco nell'equilibrio dinamico del

sistema, data dalla somma dell'accelerazione del terreno  $\ddot{x}_g(t)$  e della derivata seconda dello spostamento relativo del traverso rispetto alla base  $\ddot{x}(t)$ . Esplicitando tale termine, la stessa equazione può essere riscritta come segue:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_g(t)$$

Se si confronta questa scrittura con l'equazione del moto relativa al primo caso esaminato, si osserva come il contributo inerziale  $-m\ddot{x}_g(t)$  possa essere considerato equivalente ad una forza qualunque, applicata al traverso del portale, con legge di variazione nel tempo  $P(t) = -m\ddot{x}_g(t)$ .

Sulla base di tale considerazione, l'analisi statica lineare prevede la simulazione dell'azione del sisma su di una struttura per applicazione, ai vari impalcati, di forze costanti nel tempo (sistema di forze statiche) la cui intensità sia definita come segue (formula [7.3.7] tratta dalle NTC 2018):

$$F_i = F_h z_i \frac{W_i}{\sum_j z_j W_j} \quad (1)$$

dove:

$$F_h = S_d(T_1) W \frac{\lambda}{g}; \quad F_i = \text{forza da applicare alla massa } i\text{-esima}; \quad W_i, W_j = \text{pesi,}$$

rispettivamente delle masse  $i$  e  $j$ ;  $z_i, z_j$  = quote, rispetto al piano di fondazione, delle masse  $i$  e  $j$ ;  $S_d(T_1)$  = ordinata dello spettro di risposta di progetto definito dalla normativa (§3.2.3.5);  $W$  = massa complessiva dell'edificio;  $\lambda$  = coefficiente pari a 0,85 se la costruzione ha almeno tre orizzontamenti e se  $T_1 < 2T_c$ , pari a 1 in tutti gli altri casi;  $g$  = accelerazione di gravità.

Come rilevabile dalla precedente formulazione, in edifici pluripiano la distribuzione delle stesse forze segue una legge di accrescimento lineare (triangolare) secondo l'altezza (Figura 2a), ben rappresentativa di una situazione intermedia fra due comportamenti limite ascrivibili ad edifici con deformate globali, preminentemente secondo il primo modo di vibrare, del tipo a mensola (Figura 2b) ed a telaio con traversi infinitamente rigidi (deformata "Shear-type" – Figura 2c).

Dal testo normativo si legge quanto segue:

*NTC 17/01/2018* (§7.3.3.2): "L'analisi lineare statica consiste nell'applicazione di forze statiche equivalenti alle forze d'inerzia indotte dall'azione sismica e può essere effettuata per costruzioni che rispettino i requisiti specifici riportati nei paragrafi successivi, a condizione che il periodo del modo di vibrare principale nella direzione in esame ( $T_1$ ) non superi  $2,5T_c$  o  $T_D$  e che la costruzione sia regolare in altezza.

Per costruzioni civili o industriali che non superino i 40 m di altezza e la cui massa sia distribuita in modo approssimativamente uniforme lungo l'altezza,  $T_1$  (in secondi) può essere stimato, in assenza di calcoli più dettagliati, utilizzando la formula seguente:

$$T_1 = 2\sqrt{d} \quad [7.3.6]$$

dove  $d$  è lo spostamento laterale elastico del punto più alto dell'edificio, espresso in metri, dovuto alla combinazione di carichi [2.5.7] applicate nella direzione orizzontale “

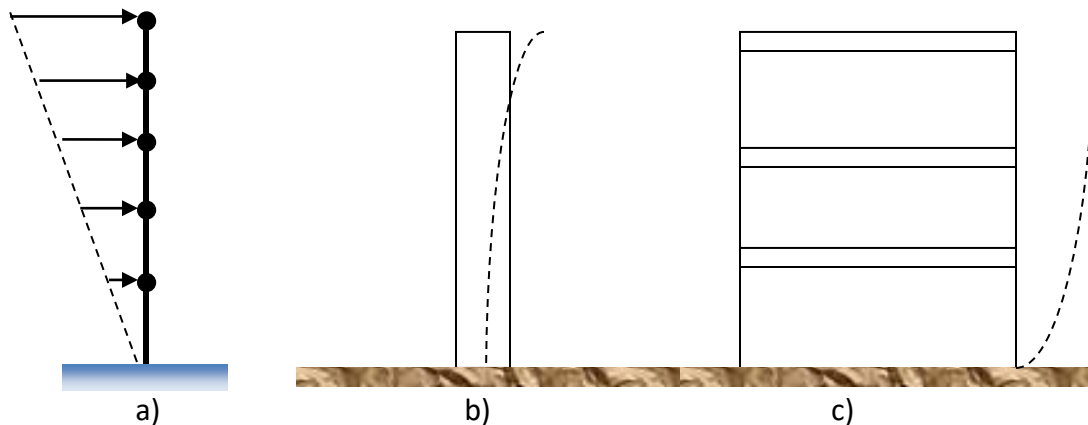


Figura 2 – Distribuzione di forze assunta dalla normativa (a); deformata a mensola di strutture con comportamento del tipo a mensola b); deformata “shear type” di un telaio pluriplano c)

L'applicazione dell'analisi statica lineare prevede lo studio semplificato della struttura secondo modelli piani, per entrambe le direzioni in pianta, ovvero la non correlazione dei modi di vibrare nei due versi dell'azione. Ciò è certamente vero se sono soddisfatte le due seguenti condizioni: 1. l'edificio ha proprietà di regolarità in pianta ed in altezza (con sostanziale coincidenza del centro delle rigidità con il baricentro delle masse e conseguente assenza di effetti torsionali significativi); 2. secondo la vecchia NTC2008 il periodo fondamentale di vibrazione (secondo entrambe le direzioni) poteva essere stimato sulla base della formula approssimata:  $T_1 = C_1 H^{3/4}$ , e doveva essere associato ad una massa modale partecipante fino all'85% della massa totale efficace (se la costruzione ha almeno tre orizzontamenti e se  $T_1 < 2T_c$ ) od 1 (in tutti gli altri casi). Tale formulazione approssimata per la valutazione del periodo è ancora ammessa per più speditive stime dello stesso parametro, come attestato nella Circolare CM del 21 gennaio 2019, N.7.

Il perché della maggiore importanza attribuita al primo modo su quelli superiori e della limitazione del relativo periodo (non superiore a  $2T_c$ ) è da riferire alle considerazioni di seguito esposte. L'analisi statica approssima la deformata globale dell'edificio con quella del primo modo ed a partire dall'imposizione dell'equilibrio delle forze esterne applicate con le azioni di taglio alla base consente l'avvio del progetto strutturale. Se il periodo

fondamentale di vibrazione rientra nell'ambito del plateau di massima eccitazione sismica e comunque risulta non superiore a 1 s, per l'equivalenza:

$$\frac{W}{g} S_d(T_1) = V_b \quad (2)$$

ove  $W$  indica il peso totale dell'edificio,  $S_d(T_1)$  il valore dell'ordinata spettrale in termini di pseudo-accelerazione e  $V_b$  la risultante delle forze di taglio alla base, ad un'alta percentuale di massa efficace attivata ( $m^*$  dell'ordine dell'85% della massa totale dell'edificio) corrisponde una significativa aliquota della componente di taglio efficace  $V_b$  a partire dalla quale condurre il progetto.

Si consideri invece il caso di un edificio deformabile con le seguenti caratteristiche correlabili ai primi tre periodi di vibrazione:  $T_1 = 1,78$  s ( $m_1^* = 0,70$ );  $T_2 = 0,42$  s ( $m_2^* = 0,13$ );  $T_3 = 0,26$  s ( $m_3^* = 0,06$ ). In riferimento ad un suolo di tipo A, corrispondano ad essi i tre seguenti valori spettrali  $S_d(T_i)$  (Figura 3):  $S_d(T_1) = 0,084$  g;  $S_d(T_2) = 0,36$  g;  $S_d(T_3) = 0,375$  g. Il contributo elastico associato a ciascun modo è pertanto pari a:  $V_{b1} = 0,7 \cdot 0,084$  g = 0,06 g;  $V_{b2} = 0,13 \cdot 0,36$  g = 0,05 g;  $V_{b3} = 0,375 \cdot 0,06$  g = 0,022 g. Da tali risultati emerge come i contributi forniti dal secondo e terzo modo alla risultante delle forze di taglio alla base non siano trascurabili rispetto a quello correlativo al primo.

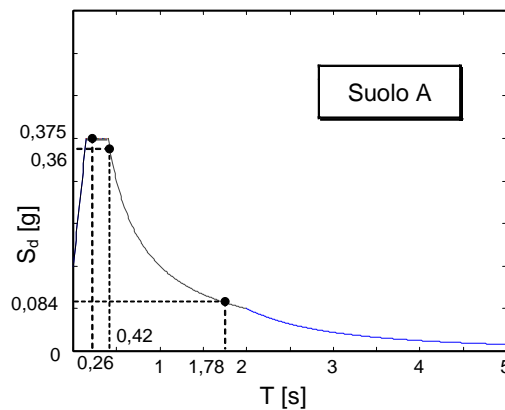


Figura 3 – Acquisizione di dati spettrali dallo spettro di progetto di normativa

Si aggiunge inoltre come, pur verificando l'assenza di effetti torsionali evidenti, la normativa (NTC 17/01/2018 - §7.3.3) preveda comunque la considerazione, nel calcolo, di effetti torsionali accidentali (NTC 17/01/2018 - §7.2.6).

NTC 14/01/2008 (§7.3.3): "Sia per l'analisi lineare dinamica che per l'analisi lineare statica, si deve tener conto dell'eccentricità accidentale del centro di massa.

Per gli edifici, gli effetti di tale eccentricità possono essere determinati mediante l'applicazione di carichi statici costituiti da momenti torcenti di valore pari alla risultante orizzontale della forza agente al piano, determinata come in §7.3.3.2, moltiplicata per

l'eccentricità accidentale del baricentro delle masse rispetto alla sua posizione di calcolo, determinata come in §7.2.6.”

Nella precedente NTC2008 veniva invece ammesso di valutarne gli effetti come di seguito riportato:

“...se le rigidezze laterali e le masse sono distribuite simmetricamente in pianta, gli effetti torsionali accidentali di cui al §7.2.6 possono essere considerati amplificando le sollecitazioni su ogni elemento resistente, calcolate con la distribuzione fornita dalla formula [7.3.6], attraverso il fattore ( $\delta$ ) risultante dalla seguente espressione:

$$\delta = 1 + 0,6 \frac{x}{L_e} \quad [7.3.7]$$

dove:

$x$  è la distanza dell'elemento resistente verticale dal baricentro geometrico di piano, misurata perpendicolarmente alla direzione dell'azione sismica considerata;

$L_e$  è la distanza tra i due elementi resistenti più lontani, misurata allo stesso modo.”

#### - **Condizioni di regolarità degli edifici**

Le seguenti Figure 4-7 pongono in luce quali possano essere le configurazioni sfavorevoli e favorevoli in pianta (Figura 4a - sfavorevoli; Figura 4b - favorevoli), in altezza (Figura 5), le discontinuità ed i disallineamenti di travi e colonne che possano creare problemi nella risposta sismica di un edificio all'azione sismica (Figura 6), nonché le regole di rientro in pianta ed in altezza previste dalle NTC2018 (§ 7.2.1 – Figura 7).

*NTC 17/01/2018* (§7.2.1): “REGOLARITA’ – Le costruzioni devono avere, quanto più possibile, struttura iperstatica caratterizzata da regolarità in pianta ed in altezza. Se necessario ciò può essere conseguito suddividendo la struttura, mediante giunti, in unità tra loro dinamicamente indipendenti.

Per quanto riguarda gli edifici, una costruzione è *regolare in pianta* se tutte le seguenti condizioni sono rispettate:

- a) la distribuzione di masse e rigidezze è approssimativamente simmetrica rispetto a due direzioni ortogonali e la forma in pianta è compatta, ossia il contorno di ogni orizzontamento è convesso; il requisito può ritenersi soddisfatto, anche in presenza di rientranze in pianta, quando esse non influenzano significativamente la rigidezza nel piano dell'orizzontamento e, per ogni rientranza, l'area compresa fra il perimetro dell'orizzontamento e la linea convessa circoscritta all'orizzontamento non supera il 5% dell'area dell'orizzontamento;
- b) il rapporto tra i lati del rettangolo circoscritto alla pianta di ciascun orizzontamento è inferiore a 4;
- c) ciascun orizzontamento ha una rigidezza nel proprio piano tanto maggiore della corrispondente rigidezza degli elementi strutturali verticali da potersi assumere

che la sua deformazione in pianta influenzi in modo trascurabile la distribuzione delle azioni sismiche tra questi ultimi e ha resistenza sufficiente a garantire l'efficacia di tale distribuzione.

Sempre riferendosi agli edifici, una costruzione è *regolare in altezza* se tutte le seguenti condizioni sono rispettate:

- d) tutti i sistemi resistenti alle azioni orizzontali (quali telai e pareti) si estendono per tutta l'altezza della costruzione o, se sono presenti parti aventi differenti altezze, fino alla sommità della rispettiva parte dell'edificio;
- e) massa e rigidezza rimangono costanti o variano gradualmente, senza bruschi cambiamenti, dalla base alla sommità della costruzione (le variazioni di massa da un orizzontamento all'altro non superano il 25%, la rigidezza non si riduce da un orizzontamento a quello sovrastante più del 30% e non aumenta più del 10%); ai fini della rigidezza si possono considerare regolari in altezza strutture dotate di pareti o nuclei in c.a. o di pareti e nuclei in muratura di sezione costante sull'altezza o di telai controventati in acciaio, ai quali sia affidato almeno il 50% dell'azione sismica alla base;
- f) il rapporto fra la capacità e la domanda allo SLV non è significativamente diverso, in termini di resistenza, per orizzontamenti successivi (tale rapporto, calcolato per un generico orizzontamento, non deve differire più del 30% dall'analogo rapporto calcolato per l'orizzontamento adiacente); può fare eccezione l'ultimo orizzontamento di strutture intelaiate di almeno tre orizzontamenti;
- g) eventuali restringimenti della sezione orizzontale della costruzione avvengano con continuità da un orizzontamento al successivo; oppure avvengano in modo che il rientro di un orizzontamento non superi il 10% della dimensione corrispondente all'orizzontamento immediatamente sottostante; né il 30% della dimensione corrispondente al primo orizzontamento. Fa eccezione l'ultimo orizzontamento di costruzioni di almeno quattro orizzontamenti, per il quale non sono previste limitazioni di restringimento."

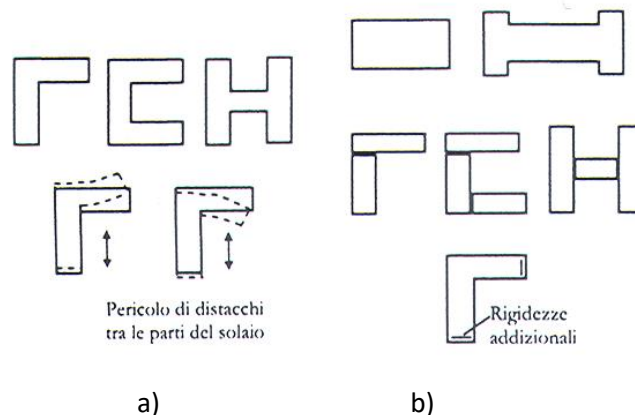


Figura 4 – Condizioni di compattezza in pianta di un complesso edilizio, favorevole a), sfavorevole b)

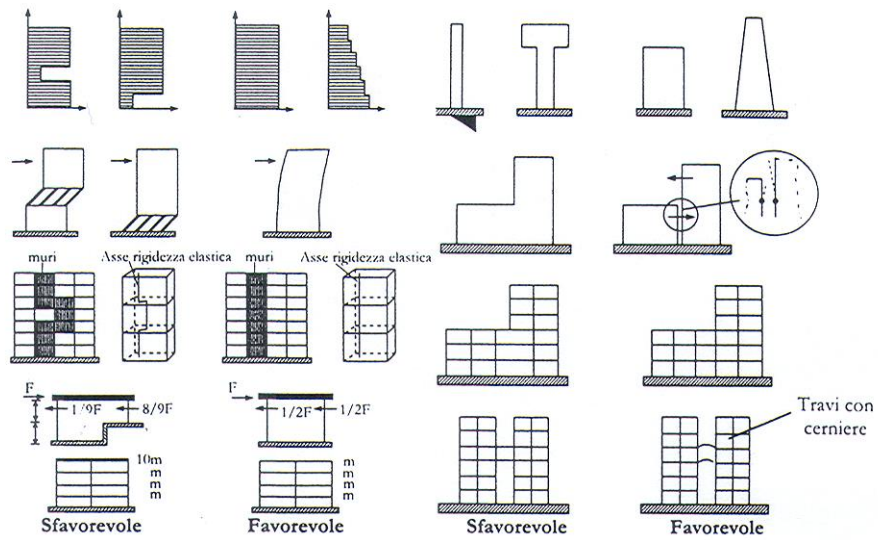


Figura 5 – Condizioni favorevoli e sfavorevoli di regolarità in altezza

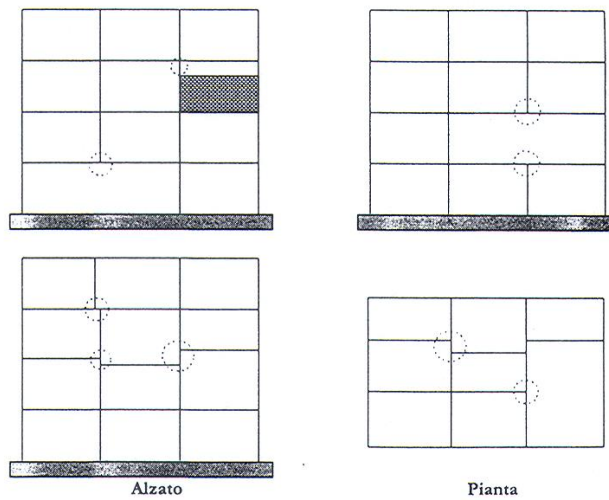


Figura 6 – Condizioni di disallineamento da evitare in alzato ed in pianta

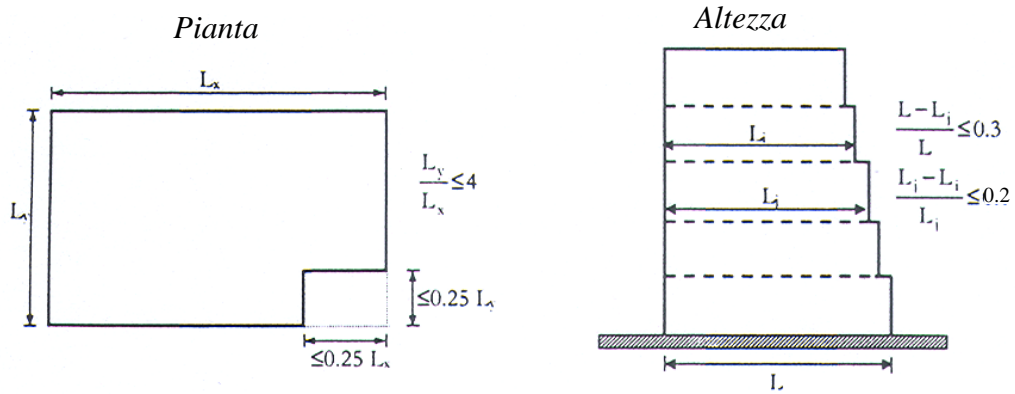
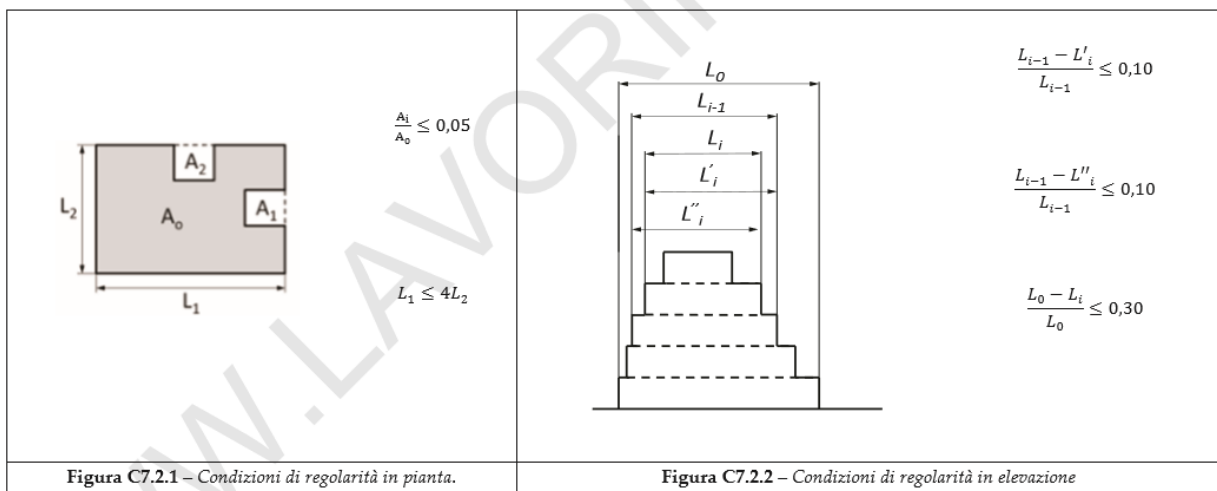


Figura 7 – NTC 2008 - Limitazioni di norma relative a rientranze e rastremazioni

**Circolare applicativa C.M. 21 gennaio 2019, n.7**





## **2. ANALISI STATICA NON LINEARE**

La capacità di una struttura di resistere ad un evento sismico dipende sensibilmente dalle sue proprietà di deformabilità e di duttilità. I metodi di analisi elastica (statico e dinamico) tengono conto del comportamento non lineare della struttura tramite il fattore di struttura che permette di ridurre lo spettro di risposta elastico. Questi metodi non possono però cogliere cambiamenti nella deformata che si verificano man mano che singoli elementi si comportino in modo duttile. Inoltre, non si ha nessuna informazione sulla distribuzione della domanda di anelasticità nella struttura. I metodi di analisi statica non lineare (comunemente denominati in letteratura come metodi di analisi “pushover”) invece, permettono di cogliere questi aspetti, risultando un utile strumento particolarmente in fase di verifica, laddove sia necessario valutare la coerenza fra fattori di struttura assunti e reale capacità di duttilità. In questo tipo di analisi si applicano incrementalmente, ad un modello della struttura soggetta ai carichi gravitazionali e con comportamento non lineare del materiale, specifiche distribuzioni di forze statiche orizzontali, le quali hanno il compito di portare in campo non lineare la struttura fino al collasso. In particolare, nella formulazione più semplice del metodo, durante l’analisi le forze orizzontali vengono tutte scalate, mantenendo invariati i rapporti relativi fra le stesse, in modo da far crescere monotonamente lo spostamento orizzontale di un punto di controllo sulla struttura (ad esempio il baricentro delle masse in sommità dell’edificio). Risultato finale è la “curva di capacità”, avente in ascisse gli spostamenti dello stesso punto di controllo ed in ordinate il taglio alla base dell’edificio, rappresentativa dell’effettiva capacità della struttura ad esplicitare deformazioni plastiche. Ai fini progettuali tale curva dovrà essere confrontata con quella “di domanda”, costruita per involucro di punti, sullo stesso piano, caratterizzati da valori di spostamento corrispondenti alle massime domande che la struttura potrebbe subire quando soggetta a terremoti di progetto di diversa intensità. Le domande di spostamento possono essere valutate utilizzando opportuni spettri di progetto. Poiché in corrispondenza di ogni punto della curva di capacità si possono valutare importanti parametri strutturali come lo spostamento globale, lo spostamento relativo fra i vari piani, le deformazioni e le sollecitazioni nei vari elementi strutturali, con tale analisi è verificabile la capacità della struttura sia in termini di resistenza che di deformabilità, tenendo conto sia delle non linearità geometriche, sia di quelle del materiale.

Al variare del tipo di distribuzione di forze e di modalità di applicazione delle stesse, della modalità di valutazione dello spostamento e dei parametri di controllo utilizzati durante l’analisi, si distinguono diversi tipi di analisi statica non lineare. In particolare, nel caso in cui la struttura sia regolare, quindi rappresentabile tramite due modelli piani secondo le direzioni ortogonali in pianta, le norme suggeriscono di considerare due distribuzioni di forze orizzontali da applicare in corrispondenza dei baricentri di massa alle varie quote. Di esse la prima è caratterizzata da forze proporzionali alle masse, mentre la seconda prevede forze d’intensità proporzionale al prodotto delle masse per la deformata associabile al primo modo di vibrare. Tale scelta nasce dalla considerazione che la distribuzione delle forze laterali dovrebbe approssimare la distribuzione delle forze d’inerzia presenti sulla struttura al momento del sisma. Confronti con analisi

dinamiche non lineari hanno evidenziato come forze proporzionali al primo modo colgano meglio la risposta dinamica finché la struttura permane in campo elastico mentre, quando si raggiungono grandi deformazioni, la risposta dinamica può risultare meglio rappresentata da distribuzioni di forze proporzionali alle masse. Nel caso di strutture regolari i due andamenti scelti definiscono i limiti delle possibili distribuzioni di forze d'inerzia durante un terremoto. Ciò non è più vero quando la struttura non abbia requisiti di regolarità, oppure sia particolarmente deformabile (edifici alti). Se i modi superiori non sono trascurabili rispetto al primo, od anche se il danno indotto dal sisma cambia significativamente nel tempo l'andamento dei modi (il metodo di *pushover* può essere applicato anche ad edifici esistenti), le norme suggeriscono di utilizzare metodi adattativi (anche denominati "metodi evolutivi") che modificano in continuazione la distribuzione di forze applicate in funzione della variazione delle caratteristiche della struttura durante il moto sismico e pertanto della sua deformata istantanea. L'analisi *pushover* può essere utilmente impiegata anche nel caso di modelli tridimensionali per mettere in evidenza le irregolarità della struttura, qualora si manifestino in seguito all'evolvere dell'azione sismica e cioè a seguito di inattese distribuzioni della richiesta di anelasticità.

La metodologia di applicazione suggerita dalle norme risulta valida per tutti gli edifici progettati secondo le norme stesse, quindi seguendo il criterio di gerarchia delle resistenze, regolari in pianta ed in altezza. Essa si basa sull'assunzione che la risposta di un sistema a più gradi di libertà possa essere correlata alla risposta di un sistema equivalente ad un grado di libertà con un'appropriata caratteristica isteretica. Ciò implica che il comportamento del sistema ad  $M$  gradi di libertà ( $MDOF$ ) sia determinato principalmente da un solo modo, la cui forma rimanga costante durante l'analisi. Il passaggio dal sistema  $MDOF$  ad uno  $SDOF$  (schema di oscillatore semplice) permette di valutare con semplicità la prestazione richiesta dal sisma. Infatti, definito il sistema  $SDOF$  equivalente e calcolato il suo periodo  $T^*$ , con l'utilizzo dello spettro di risposta elastico in spostamento è immediato dedurre lo spostamento massimo che deve essere in grado di sopportare e da questo ricavare lo spostamento massimo per cui debba essere progettato il sistema  $MDOF$ .

L'uso della metodologia proposta prevede pertanto i seguenti passi:

1. analisi *pushover* per la definizione del legame forza-spostamento generalizzato tra risultante delle forze applicate e spostamento di un punto di controllo del sistema (costruzione della *curva di capacità*);
2. determinazione delle caratteristiche di un sistema  $SDOF$  a comportamento bi-lineare equivalente;
3. determinazione della risposta massima in spostamento del sistema equivalente con utilizzo dello spettro di risposta;
4. conversione dello spostamento del sistema equivalente nella configurazione deformata della struttura e verifica (confronto con la *curva di domanda*).

Una volta noto lo spostamento del punto di controllo, dall'analisi sul modello  $MDOF$  si conosce la deformata dell'edificio che consente la deduzione degli spostamenti massimi

caratterizzanti le sezioni critiche dei singoli elementi strutturali e quindi la verifica degli stessi.

*NTC 14/01/2008 (§7.3.4.1):* “L’analisi non lineare statica consiste nell’applicare alla struttura i carichi gravitazionali e, per la direzione considerata dell’azione sismica, un sistema di forze orizzontali distribuite, ad ogni livello della costruzione, proporzionalmente alle forze d’inerzia ed aventi risultante (taglio alla base)  $F_b$ . Tali forze sono scalate in modo da far crescere monotonamente, sia in direzione positiva che negativa e fino al raggiungimento delle condizioni di collasso locale o globale, lo spostamento orizzontale  $d_c$  di un punto di controllo coincidente con il centro di massa dell’ultimo livello della costruzione (sono esclusi eventuali torrini). Il diagramma  $F_b-d_c$  rappresenta la *curva di capacità* della struttura.

Questo tipo di analisi può essere utilizzato soltanto se ricorrono le condizioni di applicabilità nel seguito precisate per le distribuzioni principali (Gruppo 1); in tal caso esso si utilizza per gli scopi e nei casi seguenti:

- valutare i rapporti di sovraresistenza  $\alpha_u/\alpha_1$  di cui ai §§7.4.3.2, 7.4.5.1, 7.6.2.2, 7.7.3, 7.8.1.3 e 7.9.2.1;
- verificare l’effettiva distribuzione della domanda inelastica negli edifici progettati con il fattore di struttura  $q$ ;
- come metodo di progetto per gli edifici di nuova costruzione sostitutivo dei metodi di analisi lineare;
- come metodo per la valutazione della capacità di edifici esistenti.

Si devono considerare almeno due distribuzioni di forze d’inerzia, ricadenti l’una nelle distribuzioni principali (Gruppo 1) e l’altra nelle distribuzioni secondarie (Gruppo 2) appresso illustrate.

**Gruppo 1** – Distribuzioni principali:

- a) distribuzione proporzionale alle forze statiche di cui al §7.3.3.2, applicabile solo se il modo di vibrare fondamentale nella direzione considerata ha una partecipazione di massa non inferiore al 75% ed a condizione di utilizzare come seconda distribuzione la 2a);
- b) distribuzione corrispondente ad una distribuzione di accelerazioni proporzionale alla forma del modo di vibrare, applicabile solo se il modo di vibrare fondamentale nella direzione considerata ha una partecipazione di massa non inferiore al 75%;
- c) distribuzione corrispondente alla distribuzione dei tagli di piano calcolati in un’analisi dinamica lineare, applicabile solo se il periodo fondamentale della struttura è superiore a  $T_c$ .

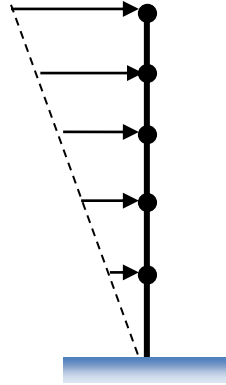
**Gruppo 2** – Distribuzioni secondarie:

- a) distribuzione uniforme di forze, da intendersi come derivata da una distribuzione uniforme di accelerazioni lungo l’altezza della costruzione;
- b) distribuzione adattiva, che cambia al crescere dello spostamento del punto di controllo in funzione della plasticizzazione della struttura.

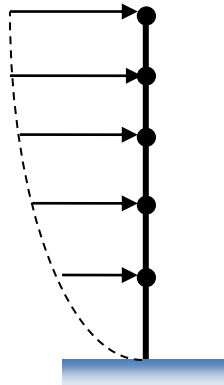
L'analisi richiede che al sistema strutturale reale venga associato un sistema strutturale equivalente ad un grado di libertà."

Distribuzioni di forze riferibili al Gruppo 1.

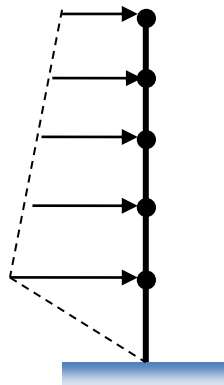
1a) Distribuzione proporzionale a quella delle forze statiche definita per l'analisi statica lineare (utilizzabile se la massa modale efficace è  $\geq 75\%$  nella direzione considerata e se si adotta, quale distribuzione di Gruppo 2, la 2a).



1b) Distribuzione proporzionale al primo modo, derivata dall'esecuzione dell'analisi modale.

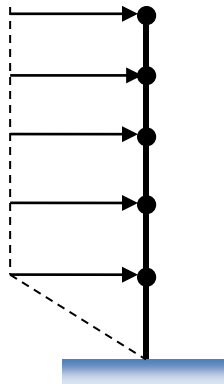


1c) Distribuzione proporzionale ai tagli di piano, se  $T_1 > T_c$ .



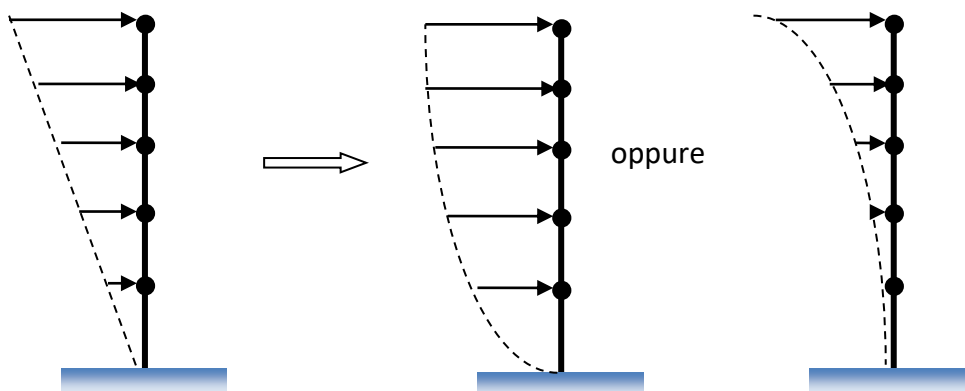
Distribuzioni di forze riferibili al Gruppo 2.

2a) Distribuzione uniforme, da applicare congiuntamente a quella 1a per il Gruppo 1.



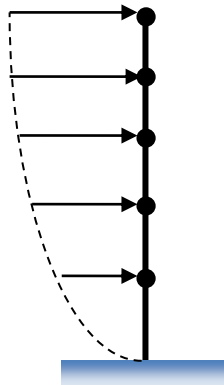
2b) Distribuzione adattiva (adattativa), che cambia in funzione della plasticizzazione della struttura. E' quella per la quale viene utilizzato il termine "evolutivo". Il concetto base di "distribuzione adattativa" risiede nel fatto che, ad ogni passo di carico successivo, viene aggiornata la matrice di rigidezza  $K$  e, conseguentemente, si possono ricalcolare le pulsazioni  $\omega_i$  e la distribuzione di accelerazioni associate al primo modo  $a_1$ . Ad ogni passo viene così aggiornata la distribuzione di forze, resa dipendente, tramite le accelerazioni di piano, agli spostamenti coincidenti con  $a_1$ . Ad esempio, se si plasticizzano prevalentemente le sezioni di un piano, la rigidezza di quel piano si abbatte più di quella degli altri piani; conseguentemente si avrà una maggiore deformabilità e dunque maggiori spostamenti localizzati a quel piano.

Distribuzione di partenza triangolare con evoluzione verso quelle di tipo parabolico "outward" od "inward"

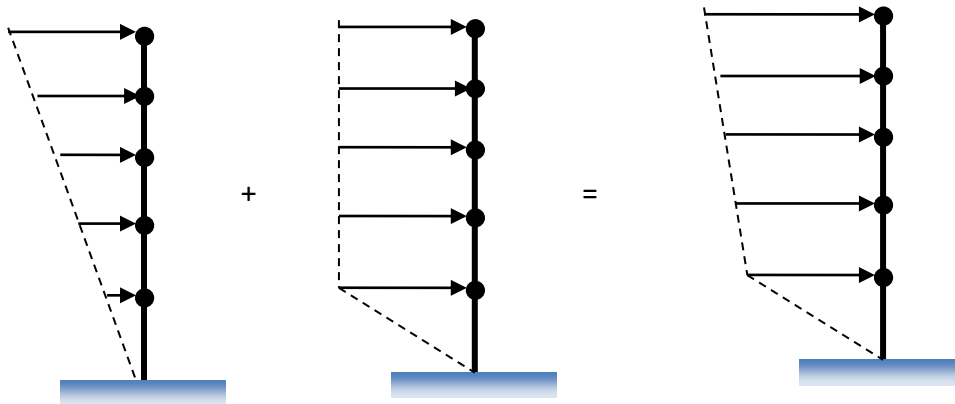


Altre possibili distribuzioni plausibili:

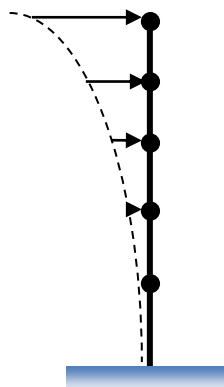
- parabolica verso l'esterno (outward)



Tale distribuzione di forze può essere approssimativamente riprodotta anche per sovrapposizione delle distribuzioni 1a e 2a, come mostrato dal seguente schema:



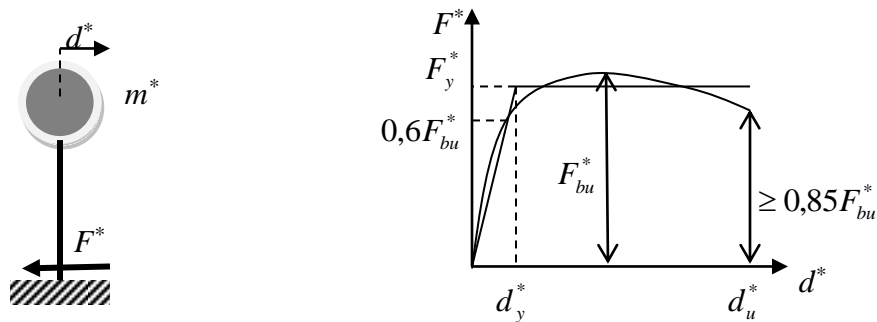
- Parabolica verso l'interno (inward)



Come in tutte le analisi in campo non lineare che richiedano un'inizializzazione del processo, è opportuno partire da una distribuzione plausibile. In questo senso sarebbe sempre preferibile assumere il primo autovettore. Tuttavia, si mostra numericamente (non per via teorica, né analitica), che si perviene a risultati pressoché identici a partire da distribuzioni anche piuttosto diverse, proprio perché l'adattamento che interviene con la progressiva plasticizzazione delle sezioni determina la stessa forma finale (determina anche la stessa curva derivante dall'analisi, fatta salva la parte iniziale e di transizione al campo plastico, dove le differenze tra le distribuzioni assunte provoca ovviamente qualche differenza di risposta).

*Circolare n.617 (§C7.3.4.1):* "Questo metodo di analisi è utilizzabile solo per costruzioni il cui comportamento sotto la componente del terremoto considerata è governato da un modo di vibrare naturale principale, caratterizzato da una significativa partecipazione di massa.

L'analisi richiede che al sistema strutturale reale venga associato un sistema strutturale equivalente ad un grado di libertà.



**Fig. C7.3.1** – Sistema e diagramma bilineare equivalente

La forza  $F^*$  e lo spostamento  $d^*$  del sistema equivalente sono legati alle corrispondenti grandezze  $F_b$  e  $d_c$  del sistema reale dalle relazioni:

$$F^* = \frac{F_b}{\Gamma} \quad [C7.3.4]$$

$$d^* = \frac{d_c}{\Gamma}$$

dove  $\Gamma$  è il "fattore di partecipazione modale" definito dalla relazione:

$$\Gamma = \frac{\varphi^T M \tau}{\varphi^T M \varphi} \quad [C7.3.5]$$

Il vettore  $\tau$  è il vettore di trascinamento corrispondente alla direzione del sisma considerata; il vettore  $\varphi$  è il modo di vibrare fondamentale del sistema reale normalizzato ponendo  $d_c=1$ ; la matrice  $M$  è la matrice di massa del sistema reale.”

Nella seguente Figura 8 vengono mostrate in sovrapposizione le curve  $F-d_c$  ed  $F^*-d^*$ .

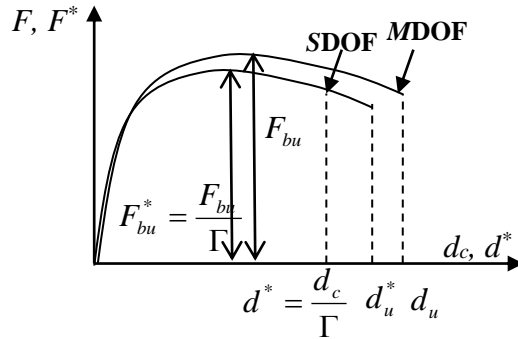


Figura 8 – Rappresentazione grafica della curva di capacità relativa al sistema effettivo ed a quello equivalente

*Circolare n.617 (§C7.3.4.1):* “Alla curva di capacità del sistema equivalente occorre ora sostituire una curva bilineare avente un primo tratto elastico ed un secondo tratto perfettamente plastico (vedi Fig. C7.3.1). Detta  $F_{bu}$  la resistenza massima del sistema strutturale reale ed  $F_{bu}^* = F_{bu} / \Gamma$  la resistenza massima del sistema equivalente, il tratto elastico si individua imponendo il passaggio per il punto  $0,6 F_{bu}^*$  della curva di capacità del sistema equivalente, la forza di plasticizzazione  $F_y^*$  si individua imponendo l’uguaglianza delle aree sottese dalla curva bilineare e dalla curva di capacità per lo spostamento massimo  $d_u^*$  corrispondente ad una riduzione di resistenza  $\leq 0,15 F_{bu}^*$ . Il periodo elastico del sistema bilineare è dato dall’espressione:

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{m^*}{k^*}} \quad [C7.3.6]$$

dove  $m^* = \Phi^T M \tau$  e  $k^*$  è la rigidezza del tratto elastico lineare.

Nel caso in cui il periodo elastico della costruzione  $T^*$  risulti  $T^* \geq T_c$  la domanda in spostamento per il sistema anelastico è assunta uguale a quella di un sistema elastico di pari periodo (v. §3.2.3.2.3 delle NTC e Fig C7.3.2a):

$$d_{\max}^* = d_{e,\max}^* = S_{De}(T^*) \quad [C7.3.7]$$

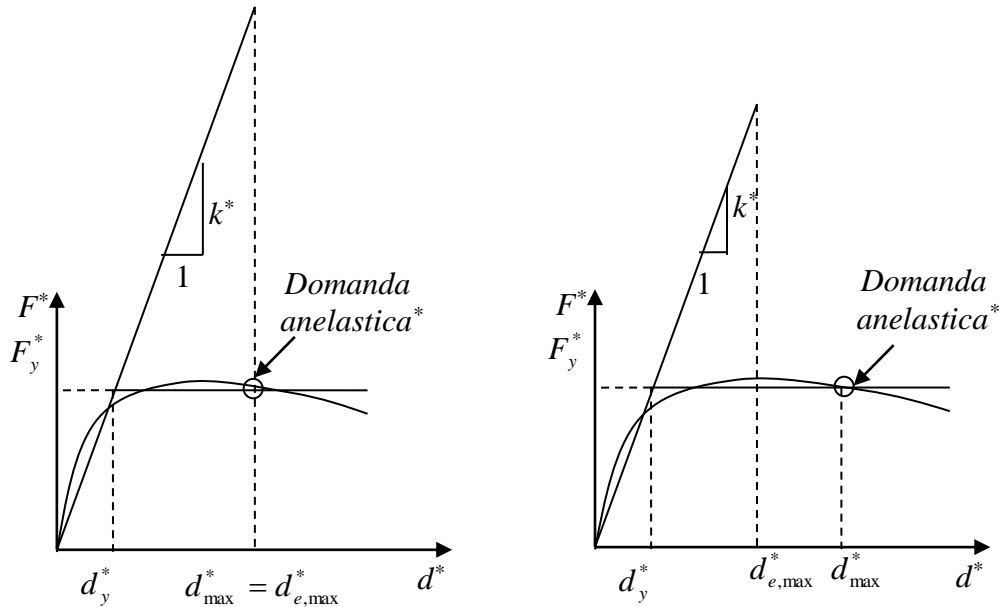
Nel caso in cui  $T^*$  risulti  $T^* < T_c$  la domanda in spostamento per il sistema elastico è minore di quella di un sistema anelastico di pari periodo (v. Fig. C7.3.2b) e si ottiene da quest’ultima mediante l’espressione:



$$d_{\max}^* = \frac{d_{e,\max}^*}{q} [1 + (q^* - 1) \frac{T_c}{T^*}] \geq d_{e,\max}^* \quad [C7.3.8]$$

dove  $q^* = S_e(T^*)m^* / F_y^*$  rappresenta il rapporto tra la forza di reazione elastica e la forza di snervamento del sistema equivalente.

Se risulta  $q^* \leq 1$  allora si ha  $d_{\max}^* = d_{e,\max}^*$ .



**Fig. C7.3.2a** – Spostamento di riferimento per  $T > T_c$  ( $T^* > T_c$ )      **Fig. C7.3.2b** – Spostamento di riferimento per  $T \leq T_c$  ( $T^* \leq T_c$ )

Gli effetti torsionali accidentali sono considerati nel modo previsto al § 7.2.6 delle NTC. Una volta trovata la domanda in spostamento  $d_{\max}^*$  per lo stato limite in esame si verifica che sia  $d_{\max}^* \leq d_u^*$  e si procede alla verifica della compatibilità degli spostamenti per gli elementi/meccanismi duttili e delle resistenze per gli elementi/meccanismi fragili. L'analisi non lineare statica condotta nei modi previsti dalle NTC può sottostimare significativamente le deformazioni sui lati più rigidi e resistenti di strutture flessibili torsionalmente, cioè strutture in cui il modo di vibrare torsionale abbia un periodo superiore ad almeno uno dei modi di vibrare principali traslazionali. Per tener conto di questo effetto, tra le distribuzioni secondarie delle forze occorre scegliere la distribuzione adattiva.

L'azione sismica deve essere applicata, per ciascuna direzione, in entrambi i possibili versi e si devono considerare gli effetti più sfavorevoli derivanti dalle due analisi."

Si osserva come nel testo della Circolare sopra riproposto siano errati la definizione di  $m^*$ , corrispondente alla massa modale efficace, ed il riferimento al periodo  $T$ , nelle figure C7.3.2a e C7.3.2b, che dovrebbe essere indicato come  $T^*$ , essendo riferito all'oscillatore semplice equivalente.

### Circolare applicativa C.M. 21 gennaio 2019, n.7

#### C7.3.4.2 ANALISI NON LINEARE STATICA

L'analisi non lineare statica consente di determinare la curva di capacità della struttura, espressa dalla relazione  $F_b-d_c$ , in cui  $F_b$  è il taglio alla base e  $d_c$  lo spostamento di un punto di controllo, che per gli edifici è in genere rappresentato dal centro di massa dell'ultimo orizzontamento. Per ogni stato limite considerato, il confronto tra la curva di capacità e la domanda di spostamento consente di determinare il livello di prestazione raggiunto. A tal fine, abitualmente, si associa al sistema strutturale reale un sistema strutturale equivalente a un grado di libertà.

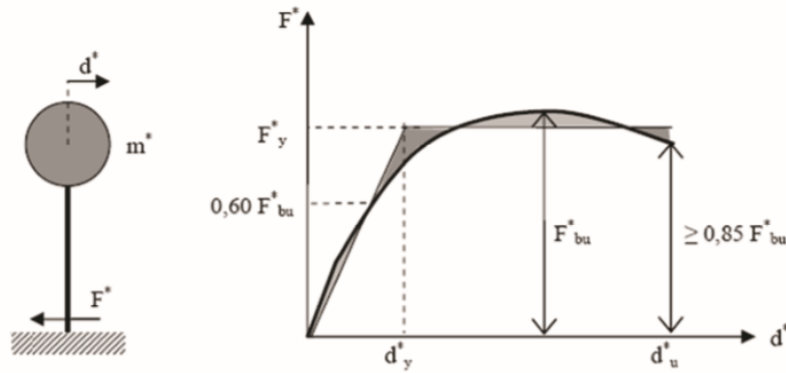


Figura C7.3.1 – Sistema e diagramma bilineare equivalente

La forza  $F^*$  e lo spostamento  $d^*$  del sistema equivalente sono legati alle corrispondenti grandezze  $F_b$  e  $d_c$  del sistema reale dalle relazioni:

$$F^* = F_b / \Gamma \quad [C7.3.3]$$

$$d^* = d_c / \Gamma \quad [C7.3.4]$$

dove  $\Gamma$  è il "fattore di partecipazione modale" definito dalla relazione:

$$\Gamma = \frac{\varphi^T M \tau}{\varphi^T M \varphi} \quad [C7.3.5]$$

Il vettore  $\tau$  è il vettore di trascinamento corrispondente alla direzione del sisma considerata; il vettore  $\varphi$  è il modo di vibrare fondamentale del sistema reale normalizzato ponendo  $d_c = 1$ ; la matrice  $M$  è la matrice di massa del sistema reale.

Ai fini operativi, per poter determinare in forma chiusa l'energia dissipata dal sistema e, quindi, lo smorzamento equivalente, alla curva di capacità del sistema equivalente è utile sostituire una curva bilineare. Le tecniche di bilinearizzazione si basano usualmente su principi di equivalenza energetica, imponendo che le aree sottese dalla curva bilineare e dalla curva  $F^*-d^*$  siano uguali.

Per la valutazione del punto di prestazione (PP) della struttura è possibile seguire uno dei seguenti metodi:

- **Metodo A**, basato sull'individuazione della domanda anelastica attraverso il principio di uguali spostamenti o uguale energia.
- **Metodo B**, basato sulla costruzione di uno spettro di capacità.

Metodo A

Alla curva di capacità del sistema equivalente si sostituisce una curva bilineare avente un primo tratto elastico ed un secondo tratto perfettamente plastico (si veda Figura C7.3.1). Detta  $F_{bu}$  la resistenza massima del sistema strutturale reale ed  $F_{bu}^* = F_{bu}/\Gamma$  la resistenza massima del sistema equivalente, il tratto elastico si individua imponendone il passaggio per il punto  $0.6F_{bu}^*$  della curva di capacità del sistema equivalente, la forza di plasticizzazione  $F_y^*$  si individua imponendo l'uguaglianza delle aree sottese dalla curva bilineare e dalla curva di capacità per lo spostamento massimo  $d_{u}^*$  corrispondente ad una riduzione di resistenza  $\leq 0.15F_{bu}^*$ .

Il periodo elastico del sistema bilineare è dato dall'espressione:

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{m^*}{k^*}} \quad [C7.3.6]$$

dove  $m^* = \Phi M\tau$  e  $k^*$  è la rigidezza del tratto elastico della bilineare.

Nel caso in cui  $T \geq T_c$  la domanda in spostamento per il sistema anelastico è assunta uguale a quella di un sistema elastico di pari periodo (v. § 3.2.3.2.3 delle NTC e Figura C7.3.2a):

$$d_{max}^* = d_{e,max}^* = S_{De}(T^*) \quad [C7.3.7]$$

Nel caso in cui  $T < T_c$  la domanda in spostamento per il sistema anelastico è maggiore di quella di un sistema elastico di pari periodo (v. Figura C7.3.2b) e si ottiene da quest'ultima mediante l'espressione:

$$d_{max}^* = \frac{d_{e,max}^*}{q} \left[ 1 + (q^* - 1) \frac{T_c}{T^*} \right] \geq d_{e,max}^* \quad [C7.3.8]$$

dove  $q^* = S_e(T^*)m^*/F_y^*$  è il rapporto tra la forza di risposta elastica e la forza di snervamento del sistema equivalente.

Se risulta  $q^* \leq 1$  allora si ha  $d_{max}^* = d_{e,max}^*$ .

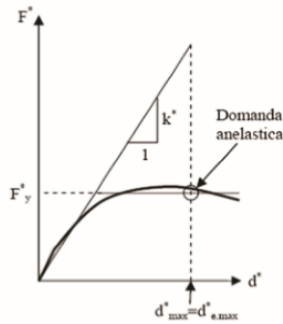


Figura C7.3.2a – Spostamento di riferimento per  $T \geq T_c$

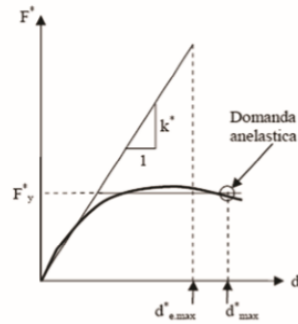


Figura C7.3.2b – Spostamento di riferimento per  $T < T_c$

Metodo B

In questo metodo il punto di prestazione e lo spostamento atteso per un dato livello di azione sono valutati attraverso un processo iterativo.

Si converte lo spettro di domanda nel relativo spettro sul piano ADRS, in cui le accelerazioni spettrali  $S_e$  sono rappresentate in funzione degli spostamenti spettrali  $S_{D_e}$ , ottenuti attraverso l'espressione [3.2.10] delle NTC.

Si effettua una prima stima del punto di prestazione ipotizzando, generalmente, che lo spostamento  $d_{max}^*$  sia pari a quello di una struttura elastica avente la stessa rigidezza iniziale della struttura analizzata:

$$d_{max}^{*(0)} = d_e \quad [C7.3.9]$$

Stimato il punto di prestazione ( $F_{max}^*, d_{max}^*$ ) sulla curva di capacità del sistema equivalente  $F^*-d^*$ , ad essa si sostituisce una curva bilineare equivalente, in termini energetici, ottenuta adottando un primo tratto con pendenza pari alla rigidezza iniziale della struttura ed identificando la forza  $F_y^*$  e la pendenza del tratto  $F_y^*-d_{max}^*$  imponendo l'uguaglianza dell'area sottesa dalle due curve, come mostrato in Figura C7.3.3. Per rappresentare la curva bilineare  $F^*-d^*$  sul piano ADRS, occorre dividere le forze per  $m^*$ .

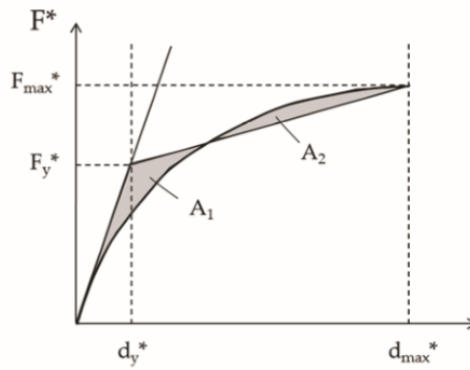


Figura C7.3.3- Bilinearizzazione equivalente

A partire dalla curva bilinearizzata così definita, si calcola lo smorzamento viscoso equivalente associato, espresso in percentuale, attraverso la [C7.3.10]:

$$\xi_{eq}^{(1)} = k \frac{63.7(F_y^{*(0)}d_{max}^{*(0)} - F_{max}^{*(0)}d_y^{*(0)})}{F_{max}^{*(0)}d_{max}^{*(0)}} + 5 \quad [C7.3.10]$$

dove il coefficiente k tiene conto delle capacità dissipative della struttura ed in particolare delle caratteristiche del ciclo di isteresi.

Indicativamente, si possono assumere i seguenti valori, a seconda della differente tipologia strutturale:

- strutture a elevata capacità dissipativa (caratterizzate da cicli di isteresi stabili e ragionevolmente ampi): k=1;
- strutture a moderata capacità dissipativa (caratterizzate da cicli di isteresi con moderata riduzione dell'area): k=0,66;
- strutture a bassa capacità dissipativa (caratterizzate da cicli di isteresi con pinching elevato e da una sostanziale riduzione dell'area): k=0,33;
- strutture dotate di appositi dispositivi di dissipazione: va valutata l'energia dissipata complessivamente, attribuendo alla struttura e al sistema di dissipazione il valore di k corrispondente all'effettiva capacità di dissipazione.

Grazie al coefficiente  $\xi_{eq}$  così calcolato si abbatte, utilizzando l'espressione [3.2.4] delle NTC, lo spettro di domanda.

L'intersezione, sul piano ADRS, fra lo spettro di domanda abbattuto e la curva di capacità del sistema equivalente fornisce il nuovo punto di prestazione, come mostrato in Figura C7.3.4; se esso è caratterizzato da uno spostamento  $d_{max}^{*(1)}$  ragionevolmente prossimo a quello stimato in partenza  $d_{max}^{*(0)}$ , la procedura iterativa ha termine e si ha la soluzione.

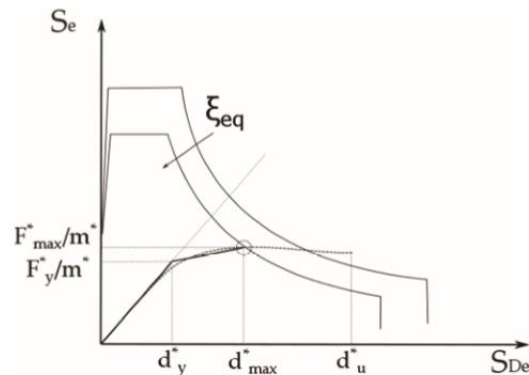


Figura C7.3.4- Individuazione del Punto di prestazione

La procedura, iterativa, è ripetuta fino a convergenza della soluzione, entro la tolleranza stabilita, secondo lo schema di Figura C7.3.5.

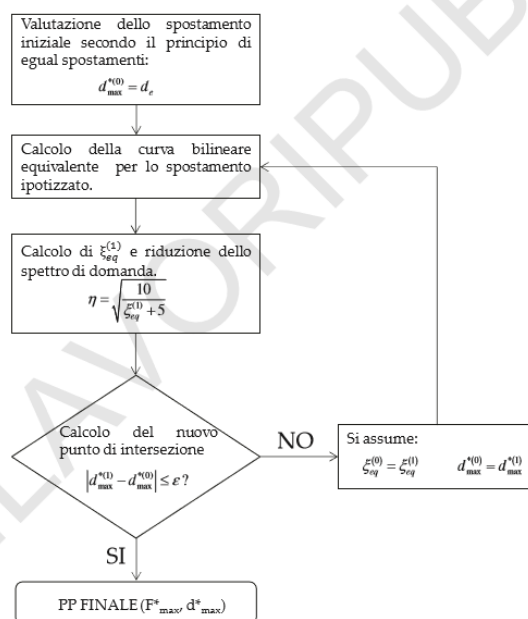


Figura C7.3.5– Diagramma di flusso per la procedura iterativa di ricerca del punto di prestazione

Una volta trovata la domanda in spostamento,  $d_{max}^*$ , per lo stato limite in esame si verifica la compatibilità degli spostamenti, per gli elementi/meccanismi duttili, e delle resistenze, per gli elementi/meccanismi fragili.

L'analisi non lineare statica, condotta nei modi previsti dalle NTC, può sottostimare significativamente le deformazioni sui lati più rigidi e resistenti di strutture flessibili torsionalmente, cioè strutture in cui il modo di vibrare torsionale abbia un periodo superiore ad almeno uno dei modi di vibrare principali traslazionali. Per tener conto di questo effetto, tra le distribuzioni secondarie delle forze occorre scegliere la distribuzione adattiva.

Per ciascuna direzione, devono essere eseguite due analisi distinte, applicando l'azione sismica in entrambi i possibili versi e considerando gli effetti più sfavorevoli derivanti da ciascuna delle due analisi.

L'ultimo passo della metodologia prevede la conversione dello spostamento massimo del sistema equivalente  $d_{max}^*$  nello spostamento massimo della struttura e lo svolgimento delle verifiche di prestazione. Tale dato è ottenibile per semplice inversione della seconda delle [C7.3.4]:

$$d_{c,max} = \Gamma d_{max}^*$$

L'analisi statica non lineare va inquadrata, concettualmente e normativamente, in una prospettiva di tipo prestazionale multi-obiettivo. In tal senso dovrà essere condotta con riferimento ai 4 livelli normativi dell'azione.

Per lo SLO ("Stato Limite di Operatività") ha poco significato perché la risposta deve essere lineare. In relazione ad esso l'analisi statica non lineare dovrà confermare l'ambito elastico di comportamento della struttura (spostamento interpiano  $\leq (2/3) \cdot 0,5\%h$ ; spostamento globale  $\leq (2/3) \cdot 0,5\% H_{tot}$ ).

Per lo SLD (“Stato Limite di Danno”) si potrà verificare già qualche prima modesta plasticizzazione, identificabile nella curva di risposta del sistema equivalente tramite il superamento di  $d_y^*$  (dato di spostamento per cui nella struttura si registra l’attivazione di almeno una cerniera plastica). Il controllo avviene, come per lo SLO e per gli altri stati limite, sugli spostamenti. Si deve verificare ad esempio che tutti gli spostamenti interpiano siano  $\leq 0,5\%h$ . In prima istanza, globalmente, si verifica che lo spostamento del punto di controllo in sommità sia  $\leq 0,5\% H_{tot}$ , successivamente vanno però comunque controllati gli spostamenti interpiano. Può infatti accadere che, mentre si rispetti la richiesta globale, qualche singolo piano ecceda il limite prestabilito. Il vantaggio di essere passati in campo non lineare per lo SLD (di fatto inesistente per lo SLO) risiede proprio nel fatto che, verificandosi qualche prima plasticizzazione in più locazioni di uno stesso piano, gli spostamenti possono risultare maggiori di quelli calcolati in campo elastico. Il discorso diventa decisamente più interessante se si assume non il livello di prestazione non strutturale, limitato dallo 0,5% di spostamento relativo di piano, bensì quello strutturale nell’ipotesi di elementi non strutturali non collaboranti, limitato all’1%. In questo caso, si hanno certamente plasticizzazioni non trascurabili che rendono l’analisi effettivamente, anche se ancora moderatamente, non lineare. Inoltre, si può operare un controllo delle seppur piccole rotazioni plastiche locali, a loro volta rapportabili a limiti di prestazione non forniti dalle NTC o dalla Circolare 617, ma da altre normative o linee guida.

Nel testo della Circolare 617, §C8.7.2.5, si legge quanto segue riguardo alla definizione della capacità rotazionale per lo stato limite di esercizio in elementi di c.a.:

*“Stato limite di esercizio*

La capacità di rotazione totale rispetto alla corda allo snervamento,  $\theta_y$ , può essere valutata mediante:

$$\theta_y = \phi_y \frac{L_V}{3} + 0,0013 \left( 1 + 1,5 \frac{h}{L_V} \right) + 0,13 \phi_y \frac{d_b f_y}{\sqrt{f_c}} \quad \text{per travi e pilastri} \quad [8.7.2.1a]$$

$$\theta_y = \phi_y \frac{L_V}{3} + 0,002 \left( 1 + 1,125 \frac{h}{L_V} \right) + 0,13 \phi_y \frac{d_b f_y}{\sqrt{f_c}} \quad \text{per pareti} \quad [8.7.2.1b]$$

dove  $\phi_y$  è la curvatura a snervamento della sezione terminale,  $h$  l’altezza della sezione,  $d_b$  è il diametro (medio) delle barre longitudinali, ed  $f_c$  e  $f_y$  sono rispettivamente la resistenza a compressione del calcestruzzo e la resistenza a snervamento dell’acciaio longitudinale in [MPa], ottenute come media delle prove eseguite in sito e da fonti aggiuntive di informazione, divise per il fattore di confidenza appropriato in relazione al Livello di Conoscenza raggiunto. ....”

Per quanto invece concerne gli elementi in acciaio, nel testo della Circolare 617, §C8.7.2.7, viene asserito quanto di seguito riportato.

“La capacità deformativa di travi e pilastri è definita con riferimento alla rotazione  $\theta$  analogamente a quanto già descritto per le strutture in c.a. (v. C8.7.2.5).

.....

#### *Stato limite di esercizio*

Per il controllo di tale Stato limite, la capacità di rotazione rispetto alla corda allo snervamento,  $\theta_y$ , può essere valutata mediante:

$$\theta_y = \frac{M_{e,Rd} L_V}{2EI} \quad [8.7.2.4]$$

dove i simboli sono definiti in C8F2.

#### **Travi e pilastri: taglio**

La resistenza a taglio  $V_R$  si valuta come per il caso di nuove costruzioni per situazioni non sismiche.

#### **Collegamenti**

Si applica quanto prescritto per gli edifici di nuova costruzione.”

Per lo SLV (“Stato Limite di salvaguardia della Vita”) per cui le NTC del 14/01/2008 e la Circolare n. 617 forniscono solo indicazioni qualitative di prestazione, risulta a maggior ragione importante operare un controllo locale di deformazione-rotazione plastica (naturalmente il controllo è sempre primariamente di tipo deformativo). Le normative ASCE-41 contengono invece criteri di controllo sia locale che globale sugli spostamenti di piano e le rotazioni. Combinandoli, si ottiene una valutazione prestazionale d’insieme. A partire da tali valutazioni una limitazione in termini di spostamento interpiano può essere fissata nel 2% per strutture a telaio in c.a., e nel 2% ÷ 2,5% per quelle in acciaio. Riguardo alla capacità deformativa, definita con riferimento alla rotazione rispetto alla corda di travi e pilastri, nel testo della Circolare n. 617 si legge quanto di seguito riportato.

(Circolare n. 617: §C8.7.2.5): “.....Stato Limite di salvaguardia della Vita – La capacità di rotazione totale rispetto alla corda a tale Stato limite,  $\theta_{SD}$ , può essere assunta pari a  $\frac{3}{4}$  del valore ultimo  $\theta_u$ .”

La stessa attestazione viene riferita, nel §C8.7.2.7, al caso di travi e pilastri di strutture a telaio in acciaio.

Lo SLV rappresenta anche lo stato limite d’elezione per le verifiche di resistenza, relative allo stato di sollecitazione e di tensione; tali verifiche dovranno pertanto affiancare le precedenti che, alla luce dei contenuti del documento normativo italiano rimangono altresì di fatto le uniche da svolgersi.

Per lo SLC (“Stato Limite di Collasso”) poiché non ci si deve fidare del collasso numerico, è opportuno verificare la risposta in termini di limitazione di spostamento, assumendo un valore massimo accettabile, ancora espresso in termini di % in altezza di piano. Tale valore è fissato al 3% per le strutture sia in c.a. che in acciaio dalle ASCE-41. Non è altissimo perché si fa riferimento ad uno stato limite di prevenzione dal collasso, ovvero a condizioni non proprio di crisi ma prossime ad essa. Al fine di controlli locali, in sezioni di c.a. la rotazione ultima può essere valutata secondo la seguente relazione (Appendice C8A.6.1 della Circolare 617):

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} 0,016 \cdot (0,3)^v \left[ \frac{\max(0,01;\omega')}{\max(0,01;\omega)} f_c \right]^{0,225} \left( \frac{L_v}{h} \right)^{0,35} 25^{(\alpha \rho_{sx} \frac{f_{yw}}{f_c})} (1,25^{100 \rho_d}) \quad [C8A.6.1]$$

ove:  $\theta_u$  = rotazione rispetto alla corda in condizioni limite ultime;  $b$  = base della sezione (mm);  $h$  = altezza della sezione (mm);  $L_v$  = luce di taglio della trave, definita come rapporto fra il momento  $M$  ed il taglio  $V$  (Circolare 617 - §C8.7.2.5);  $\gamma_{el} = 1,5$  per elementi primari ed  $1,0$  per elementi secondari (come definito al 7.2.3 delle NTC);  $v$  = sforzo assiale normalizzato, corrispondente al rapporto fra lo sforzo assiale di compressione  $N$ , agente su tutta la sezione  $A_c$ , ed il prodotto dell’area  $A_c$  per la tensione limite del

calcestruzzo  $f_c$  ( $N/A_c f_c$ );  $\omega = \frac{A_s f_y}{A_c f_c}$ ,  $\omega' = \frac{A'_s f_y}{A_c f_c}$  = percentuali meccaniche di armatura

longitudinale in trazione e compressione (nelle pareti tutta l’armatura longitudinale d’anima è da includere nella percentuale in trazione);  $f_c, f_y, f_{yw}$  = resistenze a compressione del calcestruzzo, a snervamento dell’acciaio longitudinale e trasversale, ottenute come media delle prove eseguite in sito, eventualmente corrette sulla base di fonti aggiuntive d’informazione, divise per il fattore di confidenza appropriato in relazione al livello di conoscenza raggiunto;  $\rho_{sx} = \frac{A_{sx}}{b_w s_h}$  = percentuale di armatura

trasversale ( $s_h$  = interasse delle staffe nella zona critica);  $\rho_d$  = percentuale di eventuali armature diagonali in ciascuna direzione;  $\alpha$  = fattore di efficienza del confinamento dato da:

$$\alpha = \left( 1 - \frac{s_h}{2b_0} \right) \left( 1 - \frac{s_h}{2h_0} \right) \left( 1 - \frac{\sum b_i^2}{6h_0 b_0} \right) \quad (3)$$

essendo  $b_0$  ed  $h_0$  le dimensioni del nucleo confinato, mentre  $b_i$  rappresenta le distanze delle barre longitudinali trattenute da tiranti o staffe presenti sul perimetro della sezione (per altre indicazioni in merito all’uso di tale formula si vedano i paragrafi C8.7.2.5 e C8A.6.1 della Circolare 617).



Come si rileva da altre fonti in letteratura, nel caso di strutture in acciaio i limiti rotazionali possono essere stabiliti nei seguenti valori discreti:  $\leq 50$  mrad (13 mrad per lo SLD, 30 mrad per lo SLV). Si ricorda comunque che le verifiche allo SLC sono obbligatorie solo in presenza di sistemi avanzati di protezione sismica, per il controllo di prestazione dei dispositivi in essi incorporati, piuttosto che della risposta della struttura protetta. Naturalmente, una volta che si faccia un'analisi statica non lineare per una struttura convenzionale, viene comunque voglia di fare un controllo anche allo SLC, che concorre a motivare l'adozione di questo tipo di analisi.

Si osserva infine come, per poter ricavare l'effettivo cimento in campo plastico delle membrature strutturali esaminate ci si debba riferire alla specifica trattazione riportata nel capitolo riguardante la valutazione della duttilità per i suoi differenti livelli di definizione.

Paragonata con i classici metodi di analisi che, secondo la tradizionale tecnica di progettazione, interpretano il sisma come un sistema di forze rispetto al quale la struttura deve essere in grado di fornire sufficiente resistenza, l'analisi statica non lineare considera in modo esplicito il ruolo fondamentale dello spostamento e della deformazione che sono i reali effetti del sisma sulla struttura. Questo, da una parte permette di conoscerne meglio il comportamento e quindi di progettare e verificarla in maniera più accurata, dall'altra richiede di avere a disposizione codici di calcolo in grado di descriverne la risposta anche in campo non lineare. In relazione a ciò, si osserva come i programmi con elementi aventi caratteristiche di plasticità diffusa, una volta definito il legame non lineare dei materiali, non richiedano particolare perizia da parte dell'operatore e siano facilmente in grado di fornire la *curva di capacità* della struttura; quelli a plasticità concentrata esigono invece un maggior sforzo in termini di modellazione, in quanto l'utente deve scegliere posizione e curva caratteristica delle eventuali cerniere plastiche. In quest'ottica si può dire che l'analisi statica non lineare rappresenta un'alternativa all'analisi dinamica non lineare almeno quando la struttura sia regolare, in quanto in grado di cogliere le principali caratteristiche della risposta dinamica necessitando di tempi e complessità di calcolo inferiori. Rimane tuttavia ancora uno strumento sofisticato e non alternativo a tecniche di analisi più semplici come quella modale da utilizzare preferibilmente nella progettazione di strutture nuove.

Quanto discusso in precedenza è integrato come di seguito riportato dai più recenti testi dell'NTC 2018 e relativa Circolare applicativa n.7 del 21 gennaio 2019.

## **NTC 2018, DM del 17 gennaio 2018**

### **7.3. METODI DI ANALISI E CRITERI DI VERIFICA**

L'entità della domanda con la quale confrontare la capacità della struttura, secondo i criteri definiti al § 7.3.6, può essere valutata utilizzando una delle modellazioni descritte in precedenza ed adottando uno fra i metodi di analisi illustrati nel seguito.

I metodi di analisi si articolano in lineari e non lineari, in funzione delle caratteristiche della struttura e del modello di comportamento adottato.

Nel caso di analisi lineare, la domanda sismica per strutture a comportamento sia non dissipativo, sia dissipativo, può essere ridotta utilizzando un opportuno fattore di comportamento  $q$ . I valori attribuibili a  $q$  variano in funzione del comportamento strutturale (dissipativo o non dissipativo) e dello stato limite considerati, legandosi all'entità delle plasticizzazioni, che a ciascuno stato limite si accompagnano.

Per ciascuno degli stati limite e dei metodi di analisi considerati, nella tabella successiva sono riportati:

- per l'analisi lineare, il comportamento strutturale, le modalità di modellazione dell'azione sismica e i limiti da attribuire al fattore di comportamento  $q$ , a seconda dello stato limite considerato;
- per l'analisi non lineare, il comportamento strutturale, le modalità di modellazione dell'azione sismica.

Tab. 7.3.I – Limiti su  $q$  e modalità di modellazione dell'azione sismica

STATI LIMITE		Lineare (Dinamica e Statica)		Non Lineare	
		Dissipativo	Non Dissipativo	Dinamica	Statica
SLE	SLO	$q = 1.0$ § 3.2.3.4	$q = 1.0$ § 3.2.3.4	§ 7.3.4.1	§ 7.3.4.2
	SLD	$q \leq 1,5$ § 3.2.3.5	$q \leq 1,5$ § 3.2.3.5		
SLU	SLV	$q \geq 1,5$ § 3.2.3.5	$q \leq 1,5$ § 3.2.3.5		
	SLC	---	---		

Il limite superiore del fattore  $q$  allo SLV è specificato, per tutte le tipologie strutturali, nel § 7.3.1, richiamandolo poi, per i diversi materiali, nei successivi paragrafi specifici.

**7.3.6. RISPETTO DEI REQUISITI NEI CONFRONTI DEGLI STATI LIMITE**

Per tutti gli elementi strutturali primari e secondari, gli elementi non strutturali e gli impianti si deve verificare che il valore di ciascuna domanda di progetto, definito dalla tabella 7.3.III per ciascuno degli stati limite richiesti, sia inferiore al corrispondente valore della capacità di progetto.

Le verifiche degli elementi strutturali primari (ST) si eseguono, come sintetizzato nella tabella 7.3.III, in dipendenza della Classe d'Uso (CU):

- nel caso di comportamento strutturale non dissipativo, in termini di rigidezza (RIG) e di resistenza (RES), senza applicare le regole specifiche dei dettagli costruttivi e della progettazione in capacità;
- nel caso di comportamento strutturale dissipativo, in termini di rigidezza (RIG), di resistenza (RES) e di duttilità (DUT) (quando richiesto), applicando le regole specifiche dei dettagli costruttivi e della progettazione in capacità.

Le verifiche degli elementi strutturali secondari si effettuano solo in termini di duttilità.

Le verifiche degli elementi non strutturali (NS) e degli impianti (IM) si effettuano in termini di funzionamento (FUN) e stabilità (STA), come sintetizzato nella tabella 7.3.III, in dipendenza della Classe d'Uso (CU).

**Tab. 7.3.III – Stati limite di elementi strutturali primari, elementi non strutturali e impianti**

STATI LIMITE		CU I	CU II			CU III e IV		
		ST	ST	NS	IM	ST	NS	IM <sup>(*)</sup>
SLE	SLO					RIG		FUN
	SLD	RIG	RIG			RES		
SLU	SLV	RES	RES	STA	STA	RES	STA	STA
	SLC		DUT <sup>(**)</sup>			DUT <sup>(**)</sup>		

<sup>(\*)</sup> Per le sole CU III e IV, nella categoria Impianti ricadono anche gli arredi fissi.

<sup>(\*\*)</sup> Nei casi esplicitamente indicati dalle presenti norme.

Le verifiche allo stato limite di prevenzione del collasso (SLC), a meno di specifiche indicazioni, si svolgono soltanto in termini di duttilità e solo qualora le verifiche in duttilità siano espressamente richieste (v.§7.3.6.1)

**7.3.6.1 ELEMENTI STRUTTURALI (ST)**

**VERIFICHE DI RIGIDEZZA (RIG)**

La condizione in termini di rigidezza sulla struttura si ritiene soddisfatta qualora la conseguente deformazione degli elementi strutturali non produca sugli elementi non strutturali danni tali da rendere la costruzione temporaneamente inagibile.

Nel caso delle costruzioni civili e industriali, qualora la temporanea inagibilità sia dovuta a spostamenti di interpiano eccessivi, questa condizione si può ritenere soddisfatta quando gli spostamenti di interpiano ottenuti dall'analisi in presenza dell'azione sismica di progetto corrispondente allo SL e alla CU considerati siano inferiori ai limiti indicati nel seguito.

Per le CU I e II ci si riferisce allo SLD (v. Tab. 7.3.III) e deve essere:

- a) per tamponature collegate rigidamente alla struttura, che interferiscono con la deformabilità della stessa:

$$qd_t \leq 0,0050 \cdot h \quad \text{per tamponature fragili} \quad [7.3.11a]$$

$$qd_t \leq 0,0075 \cdot h \quad \text{per tamponature duttili} \quad [7.3.11b]$$

- b) per tamponature progettate in modo da non subire danni a seguito di spostamenti d'interpiano  $d_{tp}$ , per effetto della loro deformabilità intrinseca oppure dei collegamenti alla struttura:

$$qd_t \leq d_{tp} \leq 0,0100 \cdot h \quad [7.3.12]$$

- c) per costruzioni con struttura portante di muratura ordinaria

$$qd_t \leq 0,0020 \cdot h \quad [7.3.13]$$

- d) per costruzioni con struttura portante di muratura armata

$$qd_t \leq 0,0030 \cdot h \quad [7.3.14]$$

- e) per costruzioni con struttura portante di muratura confinata

$$qd_t < 0,0025 \cdot h \quad [7.3.15]$$

dove:

$d_t$  è lo spostamento di interpiano, cioè la differenza tra gli spostamenti del solaio superiore e del solaio inferiore, calcolati, nel caso di analisi lineare, secondo il § 7.3.3.3 o, nel caso di analisi non lineare, secondo il § 7.3.4, sul modello di calcolo non comprensivo delle tamponature,

$h$  è l'altezza del piano.

Per le CU III e IV ci si riferisce allo *SLO* (v. Tab. 7.3.III) e gli spostamenti d'interpiano devono essere inferiori ai 2/3 dei limiti in precedenza indicati.

In caso di coesistenza di diversi tipi di tamponamento o struttura portante nel medesimo piano della costruzione, deve essere assunto il limite di spostamento più restrittivo. Qualora gli spostamenti di interpiano siano superiori a 0,005 h (caso b), le verifiche della capacità di spostamento degli elementi non strutturali vanno estese a tutte le tamponature, alle tramezzature interne ed agli impianti.

#### VERIFICHE DI RESISTENZA (RES)

Si deve verificare che i singoli elementi strutturali e la struttura nel suo insieme possiedano una capacità in resistenza sufficiente a soddisfare la domanda allo *SLV*.

La capacità in resistenza delle membrature e dei collegamenti è valutata in accordo con le regole contenute nei capitoli precedenti, integrate dalle regole di progettazione definite di volta in volta nei successivi paragrafi.

Per le strutture a comportamento dissipativo, la capacità delle membrature è calcolata con riferimento al loro comportamento ultimo, come definito di volta in volta nei successivi paragrafi.

Per le strutture a comportamento non dissipativo, la capacità delle membrature è calcolata con riferimento al loro comportamento elastico o sostanzialmente elastico, come definito di volta in volta nei successivi paragrafi.

La resistenza dei materiali può essere ridotta per tener conto del degrado per deformazioni cicliche, giustificandolo sulla base di apposite prove sperimentali. In tal caso, ai coefficienti parziali di sicurezza sui materiali  $\gamma_M$  si attribuiscono i valori precisati nel Cap. 4 per le situazioni eccezionali.

#### VERIFICHE DI DUTTILITÀ (DUT)

Si deve verificare che i singoli elementi strutturali e la struttura nel suo insieme possiedano una capacità in duttilità:

- nel caso di analisi lineare, coerente con il fattore di comportamento  $q$  adottato e i relativi spostamenti, quali definiti in 7.3.3.3;
- nel caso di analisi non lineare, sufficiente a soddisfare la domanda in duttilità evidenziata dall'analisi.

Nel caso di analisi lineare la verifica di duttilità si può ritenere soddisfatta, rispettando per tutti gli elementi strutturali, sia primari sia secondari, le regole specifiche per i dettagli costruttivi precisate nel presente capitolo per le diverse tipologie costruttive; tali regole sono da considerarsi aggiuntive rispetto a quanto previsto nel Cap. 4 e a quanto imposto dalle regole della progettazione in capacità, il cui rispetto è comunque obbligatorio per gli elementi strutturali primari delle strutture a comportamento dissipativo.

Per strutture a comportamento dissipativo, qualora non siano rispettate le regole specifiche dei dettagli costruttivi, quali precisate nel presente capitolo, occorrerà procedere a verifiche di duttilità.

Per le sezioni allo spiccato dalle fondazioni o dalla struttura scatolare rigida di base di cui al § 7.2.1 degli elementi strutturali verticali primari la verifica di duttilità, indipendentemente dai particolari costruttivi adottati, è necessaria qualora non diversamente specificato nei paragrafi successivi relativi alle diverse tipologie costruttive, accertando che la capacità in duttilità della costruzione sia almeno pari:

- a 1,2 volte la domanda in duttilità locale, valutata in corrispondenza dello *SLV*, nel caso si utilizzino modelli lineari,
- alla domanda in duttilità locale e globale allo *SLC*, nel caso si utilizzino modelli non lineari.

Le verifiche di duttilità non sono dovute nel caso di progettazione con  $q \leq 1,5$ .

#### 7.3.6.2 ELEMENTI NON STRUTTURALI (NS)

##### VERIFICHE DI STABILITÀ (STA)

Per gli elementi non strutturali devono essere adottati magisteri atti ad evitare la possibile espulsione sotto l'azione della  $F_a$  (v. § 7.2.3) corrispondente allo *SL* e alla *CU* considerati.

#### 7.3.6.3 IMPIANTI (IM)

##### VERIFICHE DI FUNZIONAMENTO (FUN)

Per gli impianti, si deve verificare che gli spostamenti strutturali o le accelerazioni (a seconda che gli impianti siano più vulnerabili all'effetto dei primi o delle seconde) prodotti dalle azioni relative allo *SL* e alla *CU* considerati non siano tali da produrre interruzioni d'uso degli impianti stessi.

##### VERIFICHE DI STABILITÀ (STA)

Per ciascuno degli impianti principali, i diversi elementi funzionali costituenti l'impianto, compresi gli elementi strutturali che li sostengono e collegano, tra loro e alla struttura principale, devono avere capacità sufficiente a sostenere la domanda corrispondente allo *SL* e alla *CU* considerati.

## Circolare applicativa C.M. 21 gennaio 2019, n.7

### C7.3.6 RISPETTO DEI REQUISITI NEI CONFRONTI DEGLI STATI LIMITE

In generale, la progettazione ha un'articolazione di tipo multi-prestazionale e multi-strategico. I diversi livelli prestazionali sono associati ai diversi stati limite, mentre le diverse strategie sono associate alla destinazione d'uso della costruzione.

La Tab. 7.3.III della norma sintetizza le diverse verifiche da eseguire per le costruzioni a comportamento dissipativo; nella Tabella C7.3.I, si esplicitano con maggiore dettaglio le verifiche riportate nella Tabella 7.3.III della norma, fornendo anche una descrizione sintetica della prestazione associata a ciascuno stato limite e indicando, per ogni elemento costruttivo, il riferimento al paragrafo della norma a cui si riferisce ciascuna delle verifiche.

La tabella C7.3.I fornisce, per ciascuno Stato Limite e per ciascun tipo di elemento (strutturale, non strutturale o impianto), la descrizione delle prestazioni in termini di danno, capacità ultima (resistenza o duttilità) o funzionamento; essa indica, inoltre, il tipo di verifica, in termini di confronto tra capacità e domanda, e il tipo di elemento su cui la verifica deve essere eseguita, per soddisfare il requisito prestazionale dato.

Tabella C7.3.I - Stati Limite di elementi strutturali primari, elementi non strutturali e impianti: descrizione delle prestazioni e corrispondenti verifiche

STATI LIMITE		Descrizione della prestazione		ST			NS	IM		Classe d'uso				
				RIG	RES	DUT (SPO)	STA	FUN	STA	I	II	III IV		
SLE	SLO	NS	Limitazione del danno degli elementi non strutturali, o delle pareti per le costruzioni di muratura	§ 7.3.6.1								x		
		ST												
	IM	Funzionamento degli impianti					§ 7.3.6.3					x		
	SLD	ST	Controllo del danno degli elementi strutturali		§ 7.3.1								x	
NS		Controllo del danno degli elementi non strutturali, o delle pareti per le costruzioni di muratura	§ 7.3.6.1								x	x		
ST														
SLU	SLV	ST	Livello di danno degli elementi strutturali coerente con il fattore di comportamento adottato, assenza di rotture fragili e meccanismi locali/globali instabili		§ 7.3.6.1						x	x	x	
		NS	Assenza di crolli degli elementi non strutturali pericolosi per l'incolumità, pur in presenza di danni diffusi				§ 7.3.6.3					x	x	
		IM	Capacità ultima degli impianti e dei collegamenti					§ 7.3.6.3				x	x	
	SLC	ST	Margine di sicurezza sufficiente per azioni verticali ed esiguo per azioni orizzontali			§ 7.3.6.1 (DUT)							x	x
		ST	Capacità di spostamento dei dispositivi nelle costruzioni con isolamento sismico			§ 7.10.6.2.2 (SPO)							x	x

#### C7.3.6.1 ELEMENTI STRUTTURALI (ST)

Nelle verifiche di cui al § 7.3.6.1, nel caso di analisi lineari (§7.3.3.) si assume  $d_r = d_{E_s}$ .<sup>10</sup>

In merito alle "Verifiche di Rigidezza (RIG)", per le tamponature duttili di cui al punto a) e per le tamponature di cui al punto b), va verificato sperimentalmente che il raggiungimento dei rispettivi limiti di interpiano  $0,0075h$  e  $0,0100h$  siano ottenuti sulla parte ascendente della curva di comportamento Forza-Spostamento relativo, oppure sul ramo discendente verificando però che la perdita di resistenza sia inferiore al 10% del massimo. Inoltre, durante la prova non si dovranno riscontrare significativi danneggiamenti sugli elementi.

Per tamponature duttili si intendono elementi non strutturali che sviluppano un comportamento plastico o incrudente al di là del limite elastico e deformazioni significativamente maggiori delle deformazioni al limite elastico.

#### C7.3.6.2 ELEMENTI NON STRUTTURALI (NS)

Il controllo del danno negli elementi non strutturali si effettua, in maniera indiretta, intervenendo sulla rigidezza degli elementi strutturali al fine di contenere gli spostamenti di interpiano, come indicato al § 7.3.6.1. Devono essere eseguite invece verifiche dirette in termini di stabilità. La prestazione, consistente nell'evitare la possibile espulsione delle tamponature sotto l'azione della  $F_a$ , si può ritenere conseguita con l'inserimento di leggere reti da intonaco sui due lati della muratura, collegate tra loro ed alle strutture circostanti a distanza non superiore a 500 mm sia in direzione orizzontale sia in direzione verticale, ovvero con l'inserimento di elementi di armatura orizzontale nei letti di malta, a distanza non superiore a 500 mm. La domanda sismica  $F_a$  si determina secondo le indicazioni del § 7.2.3 della norma e del § C7.2.3.

### 3. ANALISI DINAMICA LINEARE

Per i contenuti teorici si rimanda alla trattazione relativa ai sistemi a più gradi di libertà ed ai metodi di combinazione modale.

NTC 14/01/2008 (§7.3.3.1): “ L’analisi dinamica lineare consiste:

- nella determinazione dei modi di vibrare della costruzione (analisi modale),
- nel calcolo degli effetti dell’azione sismica, rappresentata dallo spettro di risposta di progetto, per ciascuno dei modi di vibrare individuati,
- nella combinazione di questi effetti.

Devono essere considerati tutti i modi con massa partecipante significativa. E’ opportuno a tal riguardo considerare tutti i modi con massa partecipante superiore al 5% e comunque un numero di modi la cui massa partecipante totale sia superiore all’85%. Per la combinazione degli effetti relativi ai singoli modi deve essere utilizzata una combinazione quadratica completa degli effetti relativi a ciascun modo, quale quella indicata nell’espressione [7.3.3]:

$$E = \left( \sum_j \sum_i \rho_{ij} E_i E_j \right)^{1/2} \quad [7.3.3]$$

con:

$E_i$  valore dell’effetto relativo al modo  $i$ ;

$E_j$  valore dell’effetto relativo al modo  $j$ ;

$\rho_{ij}$  coefficiente di correlazione tra il modo  $i$  e il modo  $j$ , calcolato con formule di comprovata validità quale: .....

Circolare n.617 (§C7.3.3.1): “ .....

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j} (\xi_i + \beta_{ij} \xi_j) \beta_{ij}^{3/2}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4\xi_i \xi_j \beta_{ij} (1 + \beta_{ij}^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2) \beta_{ij}^2} \quad [C7.3.3]$$

$\xi_i, \xi_j$  smorzamento viscoso convenzionale rispettivamente del modo  $i$  e del modo  $j$ ;

$\beta_{ij}$  è il rapporto tra l’inverso dei periodi di ciascuna coppia i-j di modi ( $\beta_{ij} = T_j / T_i$ ).”

NTC 14/01/2008 (§7.3.3.1): “..... Per gli edifici, gli effetti della eccentricità accidentale del centro di massa possono essere determinati mediante l’applicazione di carichi statici costituiti da momenti torcenti di valore pari alla risultante orizzontale della forza agente al piano, determinata come in § 7.3.3.2, moltiplicata per l’eccentricità accidentale del baricentro delle masse rispetto alla sua posizione di calcolo, determinata come in § 7.2.6.

In alternativa, nel caso in cui la struttura sia non dissipativa, si può effettuare un’analisi con integrazione al passo, modellando l’azione sismica attraverso accelerogrammi, tenendo conto dell’eccentricità accidentale nel modo indicato al § 7.2.6.”

Rispetto alla precedente NTC2008 le NTC2018 propongono di applicare la legge di combinazione quadratica completa sempre nella forma:

$$E = \left( \sum_j \sum_i \rho_{ij} E_i E_j \right)^{1/2} \quad [7.3.4]$$

definendo con  $E_j$  il valore dell'effetto relativo al modo  $j$ ;  
e specificando di stimare  $\rho_{ij}$ , coefficiente di correlazione tra il modo  $i$  e il modo  $j$ , con formule di comprovata validità:

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j} (\xi_i + \beta_{ij} \xi_j) \beta_{ij}^{3/2}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4\xi_i \xi_j \beta_{ij} (1 + \beta_{ij}^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2) \beta_{ij}^2} \quad [7.3.5a]$$

$\xi_{ij}$  smorzamento viscoso dei modi  $i$  e  $j$ ;

$\beta_{ij}$  rapporto tra l'inverso dei periodi di ciascuna coppia  $i$ - $j$  di modi ( $\beta_{ij} = T_j / T_i$ ).

La [7.3.5a], nel caso di uguale smorzamento dei modi  $i$  e  $j$  si esprime come:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2 \beta_{ij}^{3/2}}{(1 + \beta_i) [(1 - \beta_i)^2 + 4\xi^2 \beta_j]} \quad [7.3.5b]''$$

#### 4. ANALISI DINAMICA NON LINEARE



Nella Figura 9 vengono schematizzati i principali passi procedurali di conduzione dell'analisi dinamica non lineare. Da essa si evince come l'analisi richieda innanzitutto l'impiego di storie di accelerazione realmente registrate sul sito di riferimento, oppure artificialmente generate compatibilmente ad uno specifico spettro di risposta. I più diffusi codici di calcolo, come SIMQKE e REFLEX, utilizzati a quest'ultimo scopo, prevedono la sovrapposizione di molteplici armoniche di differente ampiezza e la modulazione delle loro ampiezze tale da indurre sulla struttura in esame una risposta compatibile, ovvero con scarto in difetto non inferiore al 10% rispetto al dato di ordinata spettrale elastica media.

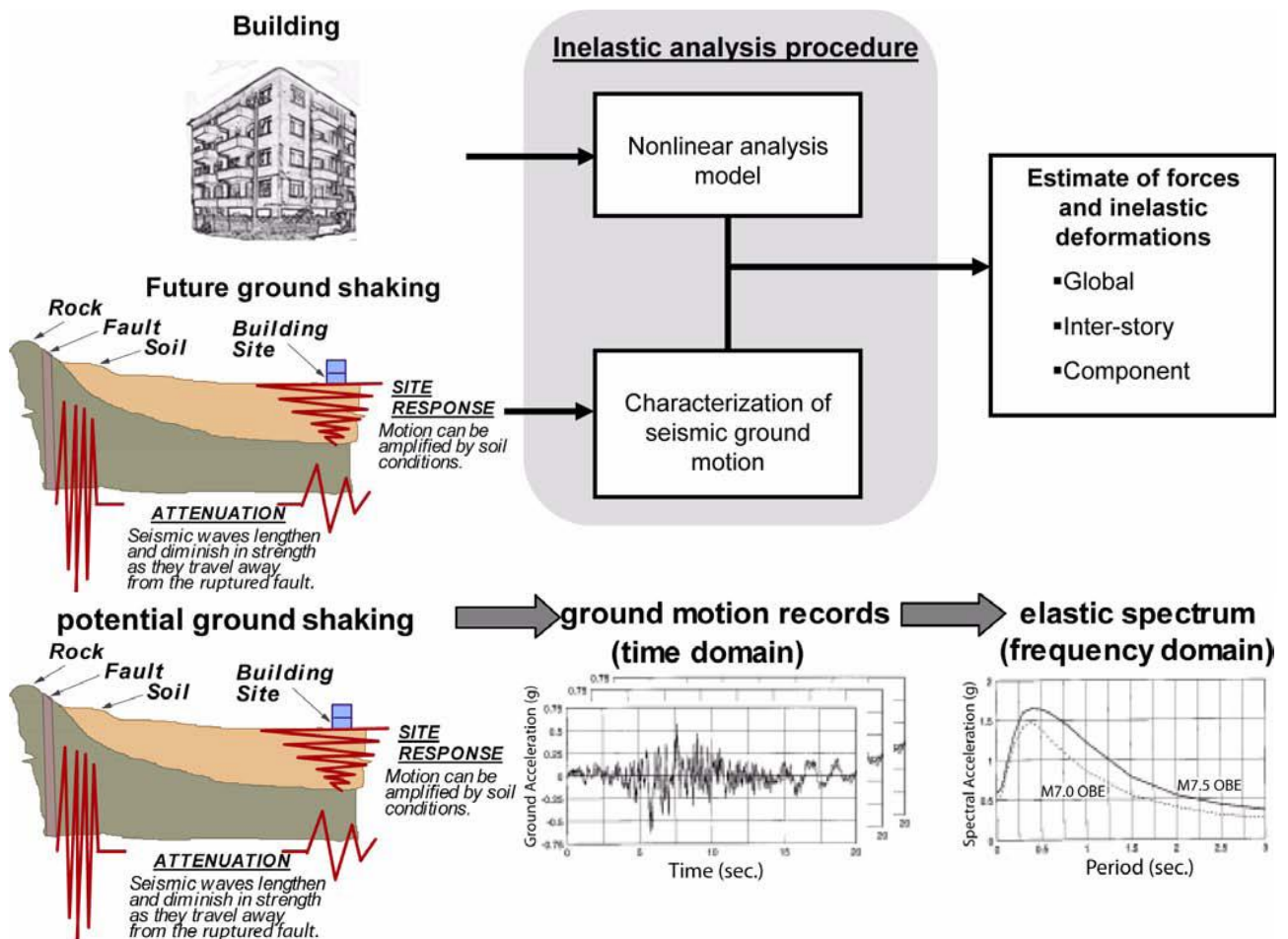


Figura 9 – Diagramma di flusso relativo all'applicazione del metodo di analisi dinamica non lineare

Nella Figura 10 vengono posti a confronto uno spettro elastico, desunto dalle regole di normativa, con quello medio ricavato da una famiglia di 15 accelerogrammi artificialmente generati tramite il codice SIMQKE. Di essi, a titolo di esempio, in Figura

11 ne viene mostrato uno, caratterizzato da un inviluppo medio di forma trapezia. Nella stessa figura viene altresì presentata la relativa funzione densità di potenza spettrale che ne descrive la composizione in frequenza delle armoniche costituenti. Come emerge particolarmente da questi ultimi grafici, il segnale è in questo caso costituito da molteplici armoniche di varia frequenza, tendente idealmente al cosiddetto “rumore bianco” (caratterizzato da un contenuto in frequenza infinito), con parte pseudo-stazionaria di durata non inferiore a 10 s (in una storia di accelerazione si definisce “pseudo-stazionaria” quella parte della funzione aleatoria la cui ampiezza media sia prossima al valore massimo e costante nel tempo).

In Figura 12 vengono infine proposte la schermata del programma SIMQKE, con l’indicazione dei dati richiesti per la generazione, ed un’esemplificazione di come si possano classificare i segnali sismici artificiali sulla base dell’inviluppo delle ampiezze (di tipo esponenziale, composto o trapezio) e del contenuto in frequenza del segnale. Si osserva come all’inviluppo esponenziale siano riferibili storie accelerometriche con ben poche armoniche significative. A seconda delle caratteristiche geologiche del sito attraversato, condizionante il filtraggio del moto sismico dall’ipocentro alla superficie, e della distanza del punto di osservazione dall’epicentro (*distanza epicentrale* – per la definizione si veda l’Appendice A), le storie di accelerazione possono essere infatti costituite da un più o meno ricco contenuto in frequenza. Al riguardo si osserva come ad esempio le scosse tipo “near field” si possano presentare sotto forma di semplici armoniche. In relazione alla distanza  $d$  dall’epicentro si definiscono tali quelle scosse registrate in luoghi per cui  $d$  sia minore di 25 km. Della stessa natura sono state quelle verificatesi durante il terremoto di Norridge del 1994, sulla faglia di S. Andrea, in prossimità dell’epicentro.

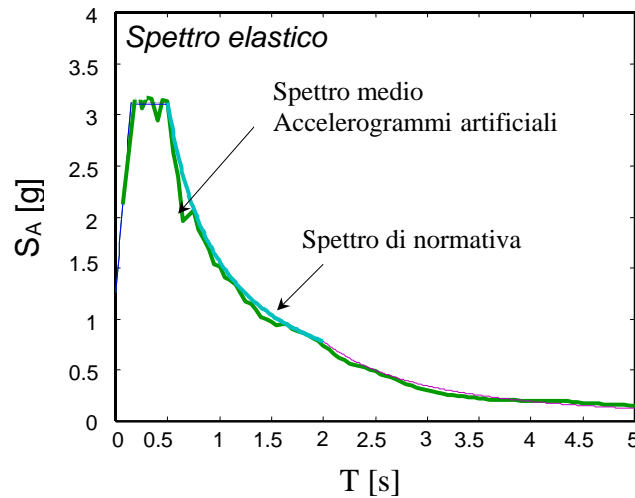


Figura 10 – Rappresentazione grafica della curva spettrale di normativa e di quella media di risposta ottenuta da un famiglia di accelerogrammi spettro-compatibili

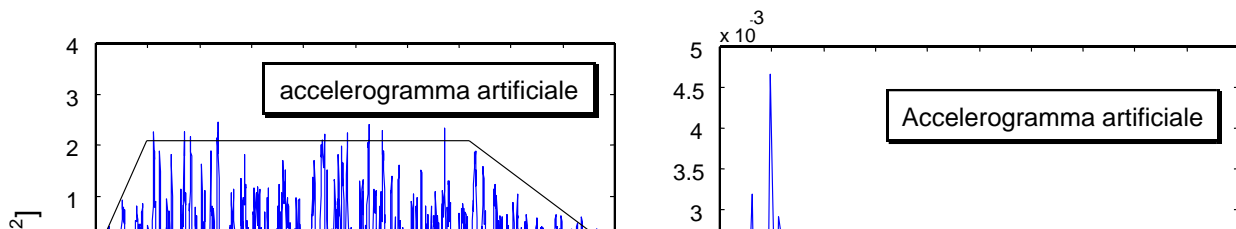


Figura 11 – Accelerogramma spettro-compatibile con inviluppo trapezoidale e relativo spettro di potenza

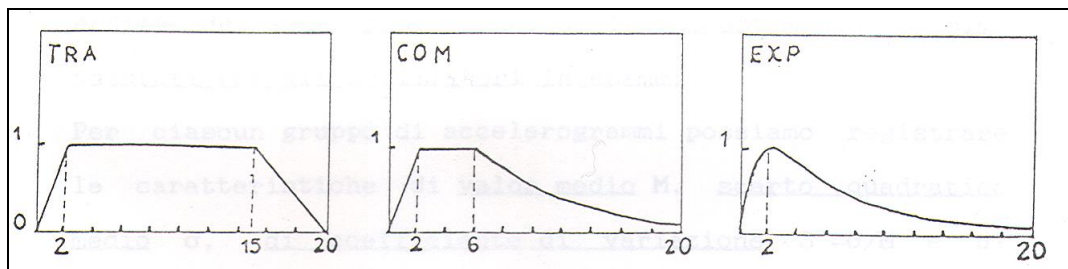
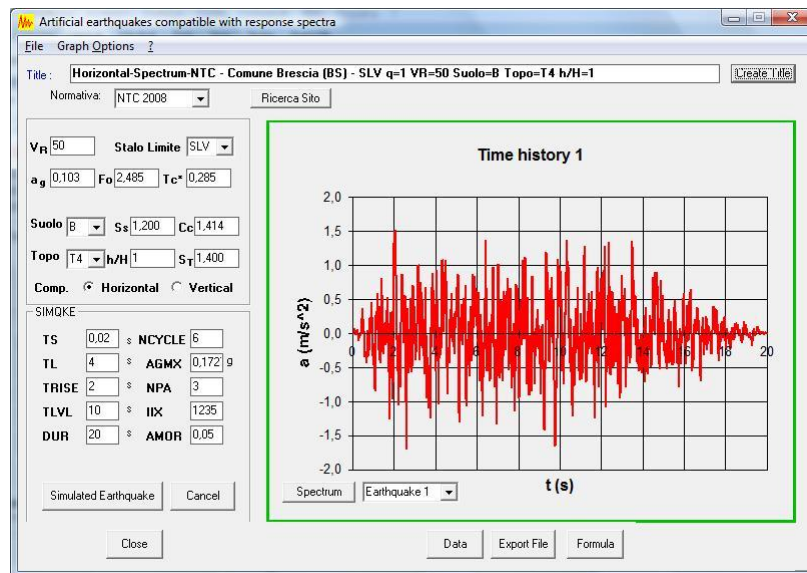


Figura 12 – Schermata di generazione di accelerogrammi spettro-compatibili tratta dal codice SIMQKE ed inviluppi d'ampiezze previsti

In Figura 13 viene riproposto lo studio della registrazione reale proveniente dalla stazione di Rinaldi. In riferimento ad essa, in Makris e Chang (2000 [1]) vengono

presentate due specifiche formulazioni, di seguito denominate come Pulse-A e Pulse-B, volte alla più corretta simulazione della storia temporale in termini di accelerazione, velocità e spostamento.

**Pulse Type-A**

$$\ddot{u}_g(t) = \omega_p \frac{v_p}{2} \sin(\omega_p t) \quad 0 \leq t \leq T_p$$

$$\dot{u}_g(t) = \frac{v_p}{2} - \frac{v_p}{2} \cos(\omega_p t) \quad 0 \leq t \leq T_p$$

$$u_g(t) = \frac{v_p}{2} t - \frac{v_p}{2\omega_p} \sin(\omega_p t) \quad 0 \leq t \leq T_p$$

**Pulse Type-B**

$$\ddot{u}_g = \omega_p v_p \cos(\omega_p t) \quad 0 \leq t \leq T_p$$

$$\dot{u}_g = v_p \sin(\omega_p t) \quad 0 \leq t \leq T_p$$

$$u_g(t) = \frac{v_p}{\omega_p} - \frac{v_p}{\omega_p} \cos(\omega_p t) \quad 0 \leq t \leq T_p$$

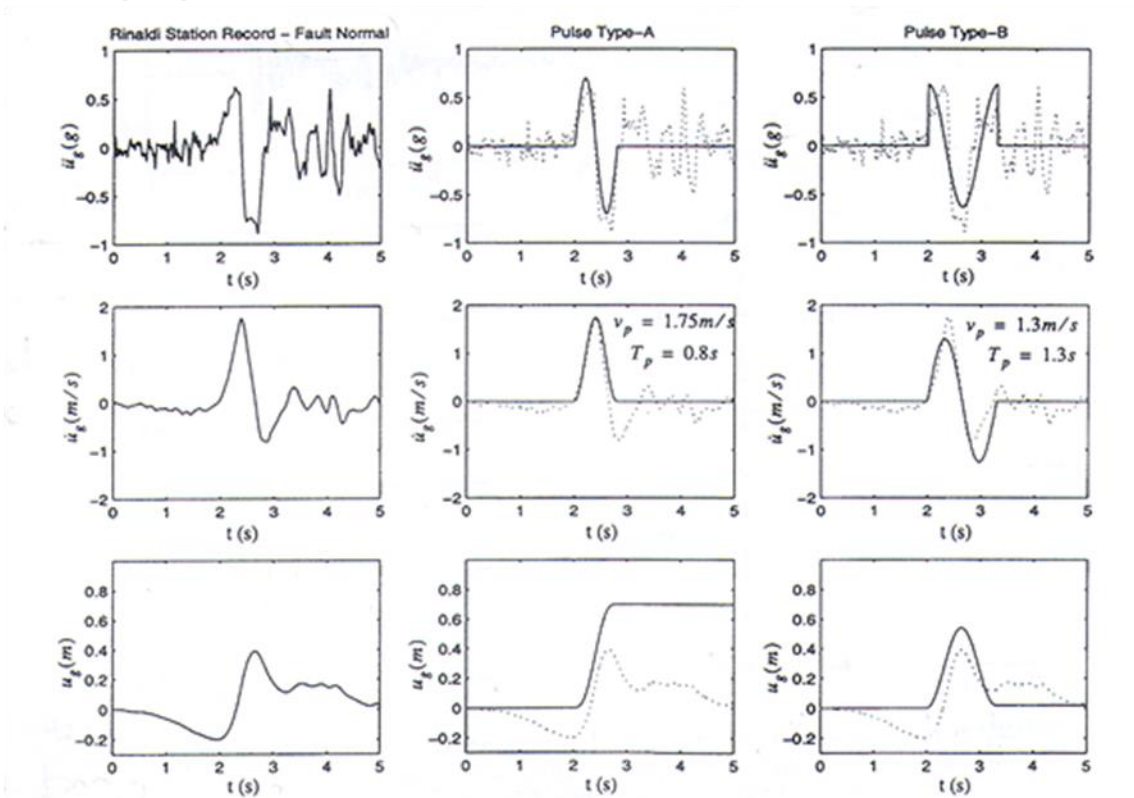


Figure 3. Fault normal components of the acceleration, velocity and displacement time histories recorded at the Rinaldi station during the 17 January 1994 Northridge, California earthquake (left), a cycloidal type-A pulse (center) and a cycloidal type-B (right).

Figura 13 – Studio della registrazione reale di Rinaldi (Makris e Chang 2000)

- **Indicazioni normative concernenti la definizione delle storie di accelerazione da utilizzare per le analisi d'integrazione al passo**

NTC 14/01/2008 (§3.2.3.6): “Gli stati limite, ultimi e di esercizio, possono essere verificati mediante l’uso di accelerogrammi, o artificiali o simulati o naturali. Ciascun accelerogramma descrive una componente, orizzontale o verticale, dell’azione sismica; l’insieme delle tre componenti (due orizzontali, tra loro ortogonali ed una verticale) costituisce un gruppo di accelerogrammi.

La durata degli accelerogrammi artificiali deve essere stabilita sulla base della magnitudo e degli altri parametri fisici che determinano la scelta del valore di  $a_g$  e di  $S_s$ . In assenza di studi specifici la durata della parte pseudo-stazionaria deve essere preceduta e seguita da tratti di ampiezza crescente da zero e decrescente a zero, di modo che la durata complessiva dell’accelerogramma sia non inferiore a 25 s.

Gli accelerogrammi artificiali devono avere uno spettro di risposta elastico coerente con lo spettro di risposta adottato nella progettazione. La coerenza con lo spettro elastico è da verificare in base alla media delle ordinate spettrali ottenute con i diversi accelerogrammi, per un coefficiente di smorzamento viscoso  $\xi$  del 5%. L’ordinata spettrale media non deve presentare uno scarto in difetto superiore al 10%, rispetto alla corrispondente componente dello spettro elastico, in alcun punto del maggiore tra gli intervalli  $0,15 \text{ s} \div 2,0 \text{ s}$  e  $0,15 \text{ s} \div 2T$ , in cui  $T$  è il periodo fondamentale di vibrazione della struttura in campo elastico, per le verifiche agli stati limite ultimi, e  $0,15 \text{ s} \div 1,5T$ , per le verifiche agli stati limite di esercizio. Nel caso di costruzioni con isolamento sismico, il limite superiore dell’intervallo di coerenza è assunto pari a  $1,2T_{is}$ , essendo  $T_{is}$  il periodo equivalente della struttura isolata, valutato per gli spostamenti del sistema d’isolamento prodotti dallo stato limite in esame.....”

Secondo le NTC 2008 la generazione degli accelerogrammi deve essere effettuata in relazione al livello di prestazione strutturale d’interesse (SLO, SLD, SLV, SLC) ed alla pericolosità sismica del sito di edificazione.

(§ 3.2. Azione sismica – NTC 2008): “Le azioni sismiche di progetto, in base alle quali valutare il rispetto dei diversi stati limite considerati, si definisce a partire dalla “pericolosità sismica di base” del sito di costruzione. Essa costituisce l’elemento di conoscenza primario per la determinazione delle azioni sismiche.....”

In generale, per “pericolosità sismica” s’intende la probabilità di eccedenza di un parametro descrittivo del moto del terreno (ad es. il picco di accelerazione del terreno contraddistinto dalla sigla PGA, oppure l’accelerazione massima del terreno epurata di picchi anomali – EPA). Nell’Allegato A delle stesse NTC vengono fornite più precise indicazioni su come poter definire tale dato (il documento è riportato nell’Appendice B del presente testo).

(§ 3.2. Azione sismica – NTC 2008): “..... La pericolosità sismica è definita in termini di accelerazione orizzontale massima attesa  $a_g$  in condizioni di campo libero su sito di riferimento rigido con superficie topografica orizzontale (di categoria A quale definita al §3.2.2), nonché di ordinate dello spettro di risposta elastico in accelerazione ad essa corrispondente  $S_e(T)$ , con riferimento a prefissate probabilità di eccedenza  $P_{VR}$ , come

definito nel §3.2.1, nel periodo di riferimento  $V_R$ , come definito nel § 2.4. In alternativa è ammesso l'uso di accelerogrammi, purché correttamente commisurati alla pericolosità sismica del sito. ....”

Riguardo poi all'analisi dinamica non lineare dai testi normativi si legge quanto segue:

*NTC 14/01/2008* (§7.3.4.2): “Essa ha lo scopo di valutare il comportamento dinamico della struttura in campo non lineare, consentendo il confronto tra duttilità richiesta e duttilità disponibile, nonché di verificare l'integrità degli elementi non strutturali nei confronti di possibili comportamenti fragili.....”.

*Circolare n. 617/C.S.LL.PP* (C7.3.4.2): “I modelli da utilizzare per effettuare analisi non lineari dinamiche devono rispettare i requisiti del §7.2.6 delle NTC. In particolare essi devono consentire una corretta rappresentazione del comportamento degli elementi strutturali in termini di resistenza, anche in funzione di possibili fenomeni di degrado associati alle deformazioni cicliche, e di comportamento post-elastico.....”

#### - **Analisi dinamica mediante soluzione diretta delle equazioni del moto**

Tale analisi prevede la soluzione in via diretta delle equazioni temporali, senza manipolazioni analitiche, come nel caso di sovrapposizione modale, che passa per il disaccoppiamento delle stesse espresse in coordinate principali. Il metodo base per l'analisi dinamica mediante soluzione diretta è rappresentato dall'integrazione numerica al passo (“step by step”), la quale consiste nella risoluzione dell'equazione del moto ad ogni passo nel quale la durata della storia temporale dell'azione in ingresso venga suddivisa (Figura 14). Detto  $\Delta t$  il passo d'integrazione e  $t_{\max}$  la durata, il numero di passi d'integrazione sarà definito semplicemente come segue:

$$n = \frac{t_{\max}}{\Delta t} \quad (4)$$

Il procedimento di risoluzione può essere descritto come segue, partendo dalla scrittura generale dell'equazione di equilibrio dinamico in un generico istante  $t_k$ , ottenibile dall'applicazione del principio di D'Alembert:

$$R_I(t_k) + R_D(t_k) + R_E(t_k) = R(t_k) \quad (5)$$

Nella (5) con  $R_I(t)$ ,  $R_D(t)$ ,  $R_E(t)$ ,  $R(t)$  sono state indicate le componenti di forza inerziale, dissipativa, elastica ed esterna applicate al sistema. I metodi numerici di risoluzione sono detti “algoritmi d'integrazione”.

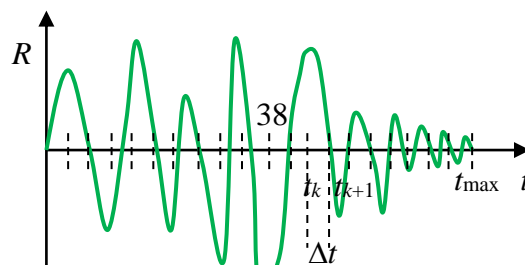


Figura 14 – Discretizzazione temporale di una storia di accelerazione

Operata la discretizzazione temporale del processo, un algoritmo utilizzabile per l'integrazione al passo della (5) richiede la definizione di relazioni incrementali di equilibrio in maniera tale che, durante l'integrazione, l'equilibrio sia garantito, secondo le due seguenti equazioni, non solo all'inizio del passo temporale (istante  $t_k$ ), ma anche alla fine di esso (istante  $t_{k+1}=t_{k+\Delta t}$ ).

$$R_I(t_k) + R_D(t_k) + R_E(t_k) = R(t_k)$$

$$R_I(t_{k+1}) + R_D(t_{k+1}) + R_E(t_{k+1}) = R(t_{k+1})$$

La differenza, effettuata membro a membro, fra le due precedenti equazioni, assume la seguente espressione:

$$\Delta R_I(t_k) + \Delta R_D(t_k) + \Delta R_E(t_k) = \Delta R(t_k) \quad (6)$$

Nella (6) gli incrementi delle singole componenti di forza in essa indicati corrispondono alle seguenti relazioni:

$$\Delta R_I(t_k) = R_I(t_{k+1}) - R_I(t_k) \quad (7.a)$$

$$\Delta R_D(t_k) = R_D(t_{k+1}) - R_D(t_k) \quad (7.b)$$

$$\Delta R_E(t_k) = R_E(t_{k+1}) - R_E(t_k) \quad (7.c)$$

$$\Delta R(t_k) = R(t_{k+1}) - R(t_k) \quad (7.d)$$

All'inizio della procedura è noto solo l'incremento delle forze esterne  $\Delta R(t_k)$ . Si sa inoltre che le forze inerziali dipendono solo dall'accelerazione  $\ddot{r}$  del sistema, mentre le forze elastiche sono funzioni dello spostamento  $r$ . L'aspetto più critico per ogni algoritmo di integrazione al passo riguarda lo smorzamento, la cui natura ne condiziona la modellazione numerica. Nel caso più semplice e comunque più frequente di smorzamento viscoso lineare, gli incrementi di forza (7.a-7.c) possono essere espressi come segue:

$$\Delta R_I(t_k) = \mathbf{M}_s(t_k) \Delta \ddot{r}(t_k) \quad (8.a)$$

$$\Delta R_D(t_k) = \mathbf{C}_s(t_k) \Delta \dot{r}(t_k) \quad (8.b)$$

$$\Delta R_E(t_k) = \mathbf{K}_s(t_k) \Delta r(t_k) \quad (8.c)$$

Le (8) sono generalmente applicabili anche a problemi di natura non lineare, in cui possa variare la stessa massa. In corrispondenza di soluzioni esatte delle (8),  $\mathbf{M}_s(t_k)$ ,  $\mathbf{C}_s(t_k)$  e  $\mathbf{K}_s(t_k)$  rappresentano proprietà secanti. Questa caratteristica è più facilmente individuabile nel caso di un sistema ad un solo grado di libertà (Figura 15). L'applicazione di una procedura al passo deve essere basata sulla conoscenza dello stato iniziale da cui non è comunque possibile dedurre le caratteristiche secanti delle singole matrici. L'espressione esatta delle (8) può essere ottenuta per iterazioni successive. Generalmente, in prima approssimazione, suddetti incrementi vengono definiti assumendo per essi il primo termine dell'espansione di Taylor relativa alle singole componenti di forza:

$$\Delta R_I(t_k) \approx \frac{\partial R_I(t_k)}{\partial \ddot{r}} \Delta \ddot{r} = \mathbf{M}_t(t_k) \Delta \ddot{r} \quad (9.a)$$

$$\Delta R_D(t_k) \approx \frac{\partial R_D(t_k)}{\partial \dot{r}} \Delta \dot{r} = \mathbf{C}_t(t_k) \Delta \dot{r} \quad (9.b)$$

$$\Delta R_E(t_k) \approx \frac{\partial R_E(t_k)}{\partial r} \Delta r = \mathbf{K}_t(t_k) \Delta r \quad (9.c)$$

In riferimento alle (9), le matrici  $\mathbf{M}_t(t_k)$ ,  $\mathbf{C}_t(t_k)$  e  $\mathbf{K}_t(t_k)$  rappresentano rispettivamente le tangenti alle curve di accelerazione, di velocità e di spostamento all'inizio del passo. Tale approssimazione consente di ottenere relazioni di equilibrio incrementale, valide sia nell'ambito lineare che in quello non lineare.

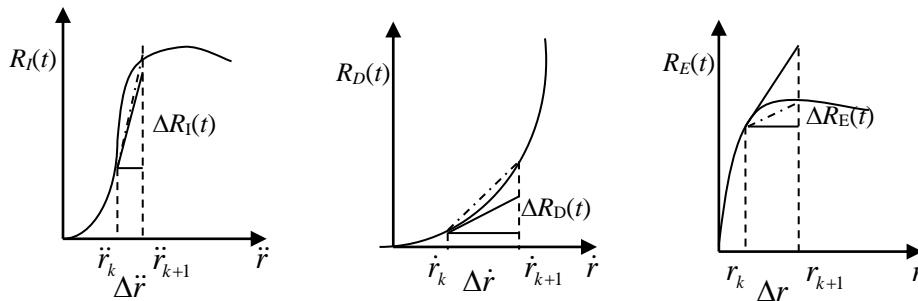


Figura 15 – Esempi di leggi di variazione non lineare delle componenti di forze inerziali, dissipative ed elastiche

Le più accreditate procedure di calcolo effettuano delle approssimazioni sull'accelerazione  $\ddot{r}$  ad ogni passo temporale. Tale informazione deve consentire di ricavare mediante integrazione la velocità e, conseguentemente, lo spostamento. Se s'introduce, come variabile adimensionale, la grandezza  $\tau$  che definisce la variazione temporale istantanea relativa al passo di ampiezza  $\Delta t$ :



$$\tau = \frac{t - t_k}{\Delta t} \quad (10)$$

supponendo di conoscere il vettore dell'accelerazione  $\ddot{r}(\tau)$  del passo k-esimo per cui  $0 \leq \tau \leq 1$ , l'integrazione consente infatti di ricavare il vettore delle velocità  $\dot{r}$  all'istante  $\tau$ :

$$\dot{r}(\tau) = \dot{r}_k + \Delta t \int_0^\tau \ddot{r}(\tau) d\tau \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (11)$$

avendo assunto le seguenti condizioni:

$$\dot{r}_k = \dot{r}(t = t_k) = \dot{r}(\tau = 0) \quad (12)$$

e successivamente di ottenere il vettore di spostamento:

$$r(\tau) = r_k + \tau \dot{r}_k \Delta t + (\Delta t)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \ddot{r}(\tau) d\tau d\tau \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (13)$$

avendo posto:

$$r_k = r(t = t_k) = r(\tau = 0) \quad (14)$$

A partire dalle (11) e (13), la risoluzione dell'integrale doppio mediante una procedura d'integrazione per parti consente di ricavare gli incrementi di spostamento e di velocità per  $\tau=1$  nella seguente forma:

$$\Delta \dot{r} = \Delta t \int_0^1 \ddot{r}(\tau) d\tau \quad (15)$$

$$\Delta r = \dot{r}_k \Delta t + (\Delta t)^2 \int_0^1 (1 - \tau) \ddot{r}(\tau) d\tau \quad (16)$$

Una volta noti l'accelerazione  $\ddot{r}(\tau)$  e gli incrementi di risposta in termini di velocità e di spostamento, risulta pertanto immediato stimare i corrispondenti valori di  $r_{k+1}$  ed  $\dot{r}_{k+1}$ , condizioni iniziali per il passo successivo. La definizione di  $\ddot{r}(\tau)$  nell'ambito del passo temporale può essere effettuata operando la seguente discretizzazione:

$$\ddot{r}(\tau) = \omega_A(\tau) \rho_A \quad (17)$$

Nella (17)  $\omega_A(\tau)$  e  $\rho_A$  rappresentano rispettivamente la variazione dell'accelerazione nell'elemento temporale ed i valori assunti dall'accelerazione stessa nei punti

d'interpolazione. Per sostituzione della (17) nelle (15) e (16) gli incrementi di spostamento e di velocità sono anche formulabili come segue:

$$\Delta \dot{r} = \dot{r}_{k+1} - \dot{r}_k = \rho_A \Delta t \int_0^1 \omega_A(\tau) d\tau \quad (18)$$

$$\Delta r = r_{k+1} - r_k = \dot{r}_k \Delta t + \rho_A (\Delta t)^2 \int_0^1 (1 - \tau) \omega_A(\tau) d\tau \quad (19)$$

Presumendo di conoscere  $\omega_A(\tau)$ , uguale per tutti i passi temporali, l'integrazione può essere applicata a priori, ed eseguita solo una volta per ogni specifico tipo di elemento. Si osserva come nelle (18) e (19) gli integrali definiscano due matrici d'influenza di cui una riferita alle velocità, mentre l'altra è riferita agli spostamenti:

$$\mathbf{C}_{VA} = \int_0^1 \omega_A(\tau) d\tau \quad (20)$$

$$\mathbf{C}_{SA} = \int_0^1 (1 - \tau) \omega_A(\tau) d\tau \quad (21)$$

Le equazioni (18) e (19) non sono comunque sufficienti a calcolare gli incrementi  $\Delta \dot{r}$  e  $\Delta r$ , dal momento che  $\rho_A$  può presentare valori incogniti. Nella famiglia degli algoritmi di Newmark, ad esempio, tale vettore è definito come segue:

$$\rho_A = [\ddot{r}_k \quad \ddot{r}_{k+1}] = [\ddot{r}_k \quad \ddot{r}_k + \Delta \ddot{r}] \quad (22)$$

La non conoscenza di  $\Delta \ddot{r}$  non consente pertanto di definire  $\ddot{r}_{k+1}$ . A tale riguardo, per specificare  $\rho_A$  secondo la (22) viene richiesta una serie di "n" equazioni aggiuntive tali da consentire la determinazione delle incognite  $\dot{r}_{k+1}$  e  $r_{k+1}$ .

Ad esempio, può essere utilizzata la seguente equazione di equilibrio:

$$\mathbf{M}_t(t_k) \Delta \ddot{r} + \mathbf{C}_t(t_k) \Delta \dot{r} + \mathbf{K}_t(t_k) \Delta r = \Delta R(t_k) \quad (23)$$

che per il calcolo degli incrementi  $\Delta r$  e  $\Delta \dot{r}$  permette di stabilire un sistema algebrico del tipo:

$$\mathbf{D}_1 \begin{Bmatrix} \Delta r \\ \Delta \dot{r} \end{Bmatrix} = b \quad (24)$$

in cui  $b$  rappresenta il vettore dei termini noti.

La valutazione degli incrementi consiste quindi nella determinazione della soluzione del sistema:

$$\begin{Bmatrix} \Delta r \\ \Delta \dot{r} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_1^{-1} b \quad (25)$$

Tutte le procedure in cui il ricorso a tale relazione non può essere evitato vengono definite “*implicite*”. Fra queste possono essere ricordate quelle relative al metodo dell’accelerazione media di Newmark [2], al metodo dell’accelerazione lineare, al modello dell’accelerazione quadratica [3] e gli algoritmi di Hermite (di ordine cubico od anche superiore – [4]). Gli algoritmi cosiddetti “*espliciti*”, invece, sono caratterizzati dalla seguente rappresentazione diretta:

$$\begin{Bmatrix} \Delta r \\ \Delta \dot{r} \end{Bmatrix} = \bar{b} \quad (26)$$

che non richiede l’inversione dell’ipermatrice  $\mathbf{D}_1$ .

Da ciò risulta evidente l’economicità di una procedura di tipo esplicito che, per ciascun passo, porta rapidamente alla soluzione. Tuttavia, considerazioni di *stabilità numerica* e di *accuratezza* della soluzione richiedono che vengano scelti per esso dei passi temporali piuttosto piccoli sia per problemi dinamici non lineari che per quelli lineari. Fra le principali procedure di questo tipo possono essere menzionate quella di Newmark con parametri significativi  $\beta=0$  e  $\gamma=1/2$  (algoritmo base di Newmark – [2], quella delle differenze centrali [5], l’algoritmo di Fu [6] ed il metodo di Trujillo [7]. Per contro, le procedure implicite si adattano meglio ad ogni metodo d’interpolazione e, benché costosi ad ogni passo, generalmente hanno caratteristiche di migliore stabilità ed accuratezza rispetto agli espliciti.

Esistono dei casi in cui non risulta necessario stabilire la funzione d’interpolazione  $\omega_A(\tau)$ . Sulla base di tale parametro le procedure possono essere generalmente classificate secondo lo schema proposto in Figura 16.

Non definendo a priori la funzione d’interpolazione  $I_n$ , nell’ambito della famiglia degli algoritmi di Newmark  $\omega_A(\tau)$  è esprimibile come segue:

$$\omega_A(\tau) = [\omega_1(\tau)I_n \quad \omega_2(\tau)I_n] = [\omega_1(\tau)I_n \quad (1 - \omega_1(\tau))I_n] \quad (27)$$

In cui:  $\omega_1(0) = 1$ ;  $\omega_1(1) = 0$ ;  $\omega_1(\tau) = 1 - \tau$ .

L’applicazione della (27) al fine di determinare le matrici d’influenza  $\mathbf{C}_{VA}$  e  $\mathbf{C}_{SA}$  consente di ottenere i due seguenti integrali:

$$\mathbf{C}_{VA} = \int_0^1 \omega_1(\tau) d\tau = [1 - \gamma \quad \gamma] \quad (28)$$

$$\mathbf{C}_{SA} = \int_0^1 (1 - \tau)\omega_1(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \beta & \beta \end{bmatrix} \quad (29)$$

in cui  $\beta$  e  $\gamma$  rappresentano le *costanti caratteristiche degli algoritmi di Newmark*. Sostituendo nelle (18) e (19) la (22) per  $\rho_A$  e le (28) e (29) per  $\mathbf{C}_{VA}$  e  $\mathbf{C}_{SA}$ , si ottiene:

$$\Delta\dot{r} = \dot{r}_{k+1} - \dot{r}_k = (1-\gamma)\ddot{r}_k \Delta t + \Delta t \gamma \ddot{r}_{k+1} = \ddot{r}_k \Delta t + \Delta t \gamma \Delta\ddot{r} \quad (30)$$

$$\Delta r = r_{k+1} - r_k = \dot{r}_k \Delta t + (\Delta t)^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{r}_k + (\Delta t)^2 \beta \ddot{r}_{k+1} = \dot{r}_k \Delta t + (\Delta t)^2 \frac{1}{2} \ddot{r}_k + (\Delta t)^2 \beta \Delta\ddot{r} \quad (31)$$

Per valutare tali incrementi deve risultare innanzitutto noto l'incremento di accelerazione  $\Delta\ddot{r}$ , desumibile dalla (23), avendo esplicitato le componenti di forza dissipativa ed elastica in funzione delle caratteristiche tangenti:

$$\Delta\ddot{r} = \mathbf{M}_t^{-1} [\Delta R(t_k) - \mathbf{C}_t(t_k) \Delta\dot{r} - \mathbf{K}_t(t_k) \Delta r] \quad (32)$$

Si osserva come la condizione di equilibrio incrementale in cui figurino le matrici tangenti di massa, rigidezza e smorzamento rappresenti solo un'approssimazione rispetto a quella effettiva nel caso di analisi non lineari, tale da indurre ad errori non trascurabili. In tal caso per le stesse matrici sono da preferirsi le espressioni secanti. Se la matrice di massa è costante l'accelerazione al passo  $k+1$ -esimo può essere calcolata imponendo l'equilibrio all'istante  $(t_k + \Delta t)$ :

$$\ddot{r}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1} [R(t_{k+1}) - R_D(t_{k+1}) - R_E(t_{k+1})] \quad (33)$$

Questa condizione procura una riduzione dell'errore. Nel caso di problemi lineari in presenza di smorzamento viscoso la (33) può essere anche formulata come segue:

$$\ddot{r}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1} [R(t_{k+1}) - \mathbf{C}\dot{r}_{k+1} - \mathbf{K}r_{k+1}] \quad (34)$$

e la (32) consente di ottenere valutazioni esatte dei relativi incrementi. Se poi si sostituisce la (32) nelle (30) e (31) è ottenibile il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_t + \Delta t^2 \beta \mathbf{K}_t & \Delta t^2 \beta \mathbf{C}_t \\ \gamma \Delta t \mathbf{K}_t & \mathbf{M}_t + \gamma \Delta t \mathbf{C}_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r \\ \Delta\dot{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta t \mathbf{M}_t \dot{r}_k + \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{M}_t \ddot{r}_k + \Delta t^2 \beta \Delta R \\ \Delta t \mathbf{M}_t \ddot{r}_k + \Delta t \gamma \Delta R \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Nella (35) la matrice a primo membro rappresenta l'ipermatrice  $\mathbf{D}_1$  per la famiglia degli algoritmi di Newmark. La procedura risulta implicita per valori non nulli di  $\beta$  e  $\gamma$ . In tal caso, ad ogni passo temporale deve essere risolto un sistema di ordine  $2n \times 2n$  con  $\mathbf{D}_1$  asimmetrica. Si deve osservare che, quando il problema è non lineare, le matrici  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$  e

$\mathbf{K}_t$  variano da passo a passo. In alternativa alla soluzione del sistema (35) possono essere applicati dei semplici criteri iterativi come il seguente, di tipo "predictor-corrector":

$$i = 0, n_i \left\{ \begin{array}{l} \Delta r^{i+1} = \dot{r}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{r}_k \Delta t^2 + \beta \Delta \ddot{r}^i \Delta t^2 \\ \Delta \dot{r}^{i+1} = \ddot{r}_k \Delta t + \gamma \Delta \ddot{r}^i \Delta t \\ \Delta \ddot{r}^{i+1} = \mathbf{M}_t^{-1} [\Delta R - \mathbf{C}_t \Delta \dot{r}^{i+1} - \mathbf{K}_t \Delta r^{i+1}] \end{array} \right. \quad (36)$$

$$c.i. \rightarrow r_k, \dot{r}_k, \ddot{r}_k, \Delta \ddot{r}(0) = 0$$

Questa procedura ha il vantaggio di convergere molto rapidamente, oltreché naturalmente di essere facilmente programmabile; è pertanto preferibile rispetto alla soluzione diretta della (35) che richiede l'adozione di specifici criteri di risoluzione di matrici asimmetriche. Nel caso particolare in cui  $\beta=0$  ed  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$  siano diagonali, la procedura esplicita è rappresentabile mediante il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta r \\ \Delta \dot{r} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{r}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{r}_k \Delta t^2 \\ [\mathbf{M}_t + \gamma \Delta t \mathbf{C}_t]^{-1} [-\gamma \dot{r}_k \Delta t^2 \mathbf{K}_t + \ddot{r}_k (\mathbf{M}_t \Delta t - \gamma \mathbf{K}_t \Delta t^3) + \Delta t \gamma \Delta R] \end{array} \right\} \quad (37)$$

rispondente alla seguente formula generale:

$$\mathbf{D}_1 \left\{ \begin{array}{l} r \\ \dot{r} \end{array} \right\}_{k+1} = \mathbf{D}_0 \left\{ \begin{array}{l} r \\ \dot{r} \end{array} \right\}_k + F \quad (38)$$

Se inoltre a  $\gamma$  viene attribuito un valore pari ad  $\frac{1}{2}$ , tale algoritmo risulta *condizionatamente stabile*.

Metodi espliciti	Metodi impliciti
$\left\{ \begin{array}{l} r \\ \dot{r} \end{array} \right\} = \mathbf{A} \left\{ \begin{array}{l} r \\ \dot{r} \end{array} \right\}_k + L$ <p><math>\mathbf{A}</math>, <math>L</math> definibili senza inversione; operazioni rapide per ogni passo; richiesta di un piccolo passo temporale.</p> <p>Esempio: Newmark, <math>\beta=0</math>, <math>\gamma=1/2</math></p>	$\mathbf{D}_1 \left\{ \begin{array}{l} r \\ \dot{r} \end{array} \right\}_{k+1} = \mathbf{D}_0 \left\{ \begin{array}{l} r \\ \dot{r} \end{array} \right\}_k + F$ <p><math>\mathbf{A} = \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_0</math> soluzione delle equazioni; <math>\mathbf{L} = \mathbf{D}_1^{-1} F</math> richieste; operazioni lente ad ogni passo; generalmente numericamente stabili.</p> <p>Esempio: Newmark, metodo dell'accelerazione media, <math>\beta=1/4</math>, <math>\gamma=1/2</math></p>

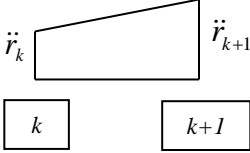
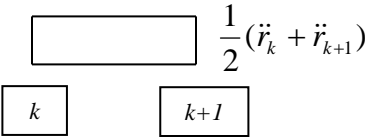
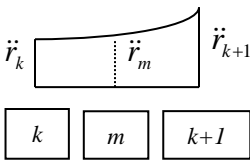
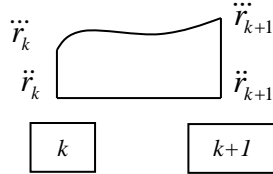
Tipo d'interpolazione		
Non stabilita	Polinomiale lagrangiana	Polinomiale hermitiana
Newmark, $\beta=0, \gamma=1/2$ (esplicito)	Lineare 	accelerazione media 
	Implicito	Newmark implicito
	Quadratica 	
	Implicito: Zienkiewicz	Implicito: Argyris et al.

Figura 16 – Schema di caratterizzazione di alcuni dei più noti algoritmi d'integrazione

- **Proprietà degli algoritmi**

Ad ogni algoritmo d'integrazione al passo possono essere generalmente riferite le seguenti proprietà: stabilità, accuratezza, convergenza, dissipazione algoritmica ed efficienza. In particolare un algoritmo si definisce **stabile** se, prendendo in esame un'oscillazione libera con condizioni iniziali  $r_1$  ed  $\dot{r}_1$  le risposte  $r(t)$  ed  $\dot{r}(t)$  risultano limitate in relazione alla non negatività dello smorzamento; anche lo spostamento e la velocità calcolate mediante l'integrazione numerica non devono mai accrescersi illimitatamente.

I vari algoritmi d'integrazione possono essere distinti in *condizionatamente stabili* ed *incondizionatamente stabili*. Una procedura viene definita "*condizionatamente stabile*" se genera una risposta finita dipendentemente dalle dimensioni assunte per il passo temporale; viene definita invece "*incondizionatamente stabile*" se tale proprietà viene assicurata per una qualunque scelta del passo stesso. Nel caso degli algoritmi di Newmark se  $\beta < 1/4$  la procedura è *condizionatamente stabile* (es.  $\beta=1/6$ ); se invece  $\beta \geq 1/4$  risulta verificata la condizione di *stabilità incondizionata*.

Per **accuratezza** di un algoritmo s'intende la proprietà di **convergere** alla soluzione esatta del problema dinamico. Un metodo di valutazione di tale requisito consiste nella stima dello scostamento del periodo stabilito dalla procedura rispetto a quello proprio del sistema esaminato.

In assenza di una componente di smorzamento nell'equazione del moto, l'algoritmo deve poter simulare delle oscillazioni libere non-smorzate. Talvolta può tuttavia

presentarsi un moto oscillatorio smorzato: si parla in tal caso di **dissipazione algoritmica**. Indipendentemente da  $\beta$  per gli algoritmi di Newmark se  $\gamma$  viene assunto uguale ad  $\frac{1}{2}$  viene garantita la condizione di stabilità. Se  $\gamma$  risulta  $>1/2$  si genera smorzamento algoritmico, mentre per  $\gamma < 1/2$  l'algoritmo è instabile.

Per **efficienza** s'intende una combinazione delle caratteristiche di stabilità, accuratezza, convergenza, dissipazione algoritmica e richiesta di tempo di elaborazione computazionale.

### Riferimenti bibliografici

[1] Makris, N. and Chang S-P. (2000). Effect of viscous, viscoplastic, and friction damping on the response of seismic isolated structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 29, 85-107.

[2] Newmark N.M. (1959). A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, V. 85, N. EM3, pp.67-94.

[3] Zienkiewicz O.C. (1977). *The finite element method*, 3rd Ed. McGraw Hill Book Company, London.

[4] Argyris J., Dunne P.C., Angelopoulos (1973). Non-linear oscillations using the finite element technique, *Computational Methods Applied Mechanics Engineering*, V. 2 pp. 203-250.

[5] Clough R.W. (1973). Numerical integration of the equations of motion, *Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics*, University of Alabama, Huntsville, pp. 525-533.

[6] Fu C.C. (1970). A method for the numerical integration of the equations of motion arising from a finite element analysis, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, V. 37, pp. 599-605.

[7] Trujillo D.M. (1977), An unconditionally stable explicit algorithm for structural dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V. 11 pp. 1579-1592.

## APPENDICE A

### Definizioni notevoli caratterizzanti un evento sismico

I movimenti delle zolle determinano in profondità condizioni di sforzo e di accumulo di energia; quando lo sforzo a cui sono sottoposte le rocce supera il loro limite di resistenza, l'energia si libera generando il terremoto. Il punto in cui ha origine il terremoto è detto "ipocentro" e la sua proiezione sulla superficie "epicentro": in relazione ad un punto d'osservazione stabilito, si definiscono distanza ipocentrale ed epicentrale rispettivamente la sua distanza dall'ipocentro e dall'epicentro; la distanza dall'ipocentro all'epicentro è invece detta "distanza focale". Le suddette definizioni sono rappresentate in figura A.

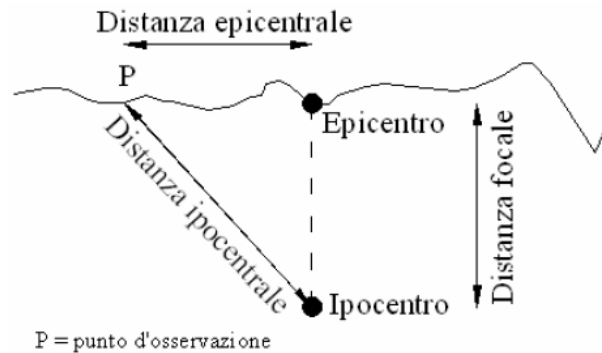


Figura A – Rappresentazione schematica di alcuni dei parametri più importanti per la caratterizzazione di un evento sismico



## APPENDICE B

### **Concetto di Pericolosità sismica e valutazione dei parametri ad essa correlativi**

(**ALLEGATO A – NTC 14/01/2008**): “La *pericolosità sismica* in un generico sito deve essere descritta in modo da renderla compatibile con le NTC e da dotarla di un sufficiente livello di dettaglio, sia in termini geografici che in termini temporali; tali condizioni possono ritenersi soddisfatte se i risultati dello studio di pericolosità sono forniti:

- in termini di valori di accelerazione orizzontale massima  $a_g$  e dei parametri che permettono di definire gli spettri di risposta ai sensi delle NTC, nelle condizioni di sito di riferimento rigido orizzontale sopra definite;
- in corrispondenza dei punti di un reticolo (*reticolo di riferimento*) i cui nodi sono sufficientemente vicini fra loro (non distano più di 10 km);
- per diverse probabilità di superamento in 50 anni e/o diversi *periodi di ritorno*  $T_R$  ricadenti in un *intervallo di riferimento* compreso almeno tra 30 e 2475 anni, estremi inclusi.

L'azione sismica così individuata viene successivamente variata, nei modi chiaramente precisati dalle NTC, per tener conto delle modifiche prodotte dalle condizioni locali stratigrafiche del sottosuolo effettivamente presente nel sito di costruzione e dalla morfologia della superficie. Tali modifiche caratterizzano la risposta sismica locale.

La disponibilità d'informazioni così puntuali e dettagliate, in particolare il riferimento a più probabilità di superamento, consente ad un tempo di:

- a) adottare, nella progettazione e verifica delle costruzioni, valori dell'azione sismica meglio correlati alla pericolosità sismica del sito, alla vita nominale della costruzione e all'uso cui essa è destinata, consentendo così significative economie e soluzioni più agevoli del problema progettuale, specie nel caso delle costruzioni esistenti;
- b) trattare le problematiche di carattere tecnico-amministrativo connesse alla pericolosità sismica adottando una classificazione sismica riferibile anche a porzioni territoriali dei singoli comuni.

In particolare è possibile separare le questioni di cui al punto a) dalle questioni di cui al punto b); nel seguito del presente paragrafo si esamineranno le questioni relative al punto a); le questioni relative al punto b) saranno oggetto di specifico provvedimento.

Allo stato attuale, la *pericolosità sismica su reticolo di riferimento nell'intervallo di riferimento* è fornita dai dati pubblicati sul sito <http://esse1.mi.ingv.it>. Eventuali differenti pericolosità sismiche sono approvate dal Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici, previa istruttoria effettuata dal Dipartimento per la Protezione Civile, al fine di valutarne l'attendibilità scientifica e l'idoneità applicativa in relazione ai criteri di verifica adottati nelle NTC.

Le azioni di progetto si ricavano, ai sensi delle NTC, dalle accelerazioni  $a_g$  e dalle relative forme spettrali.

Le forme spettrali previste dalle NTC sono definite, su sito di riferimento rigido orizzontale, in funzione dei tre parametri:

$a_g$  accelerazione orizzontale massima del terreno;

$F_0$  valore massimo del fattore di amplificazione dello spettro in accelerazione orizzontale;

$T_C^*$  periodo di inizio del tratto a velocità costante dello spettro in accelerazione orizzontale.

Per ciascun nodo del reticolo di riferimento e per ciascuno dei periodi di ritorno  $T_R$  considerati dalla pericolosità sismica, i tre parametri si ricavano riferendosi ai valori corrispondenti al 50esimo percentile ed attribuendo a:

$a_g$  il valore previsto dalla pericolosità sismica,

$F_0$  e  $T_C^*$  i valori ottenuti imponendo che le forme spettrali in accelerazione, velocità e spostamento previste dalle NTC scartino al minimo dalle corrispondenti forme spettrali previste dalla pericolosità sismica (la condizione di minimo è imposta operando ai minimi quadrati, su spettri di risposta normalizzati ad uno, per ciascun sito e ciascun periodo di ritorno).

Le forme spettrali previste dalle NTC sono caratterizzate da prescelte probabilità di superamento e vite di riferimento. A tal fine occorre fissare:

- la *vita di riferimento*  $V_R$  della costruzione,
- le *probabilità di superamento nella vita di riferimento*  $P_{VR}$  associate a ciascuno degli stati limite considerati,

per individuare infine, a partire dai dati di pericolosità sismica disponibili, le corrispondenti azioni sismiche.

Tale operazione deve essere possibile per tutte le vite di riferimento e tutti gli stati limite considerati dalle NTC; a tal fine è conveniente utilizzare, come parametro caratterizzante la pericolosità sismica, il periodo di ritorno dell'azione sismica  $T_R$ , espresso in anni. Fissata la vita di riferimento  $V_R$ , i due parametri  $T_R$  e  $P_{VR}$  sono immediatamente esprimibili, l'uno in funzione dell'altro, mediante l'espressione:

$$T_R = -\frac{V_R}{\ln(1 - P_{VR})}$$

Qualora l'attuale pericolosità sismica su reticolo di riferimento non contempli il periodo di ritorno  $T_R$  corrispondente alla  $V_R$  ed alla  $P_{VR}$  fissate, il valore del generico parametro  $p(a_g, F_0, T_C^*)$  ad esso corrispondente potrà essere ricavato per interpolazione, a partire dai dati relativi ai  $T_R$  previsti nella pericolosità sismica, utilizzando l'espressione seguente:

$$\log(p) = \log(p_1) + \log\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \cdot \log\left(\frac{T_R}{T_{R1}}\right) \cdot \left[\log\left(\frac{T_{R2}}{T_{R1}}\right)\right]^{-1}$$

nella quale:

$p$  è il valore del parametro d'interesse corrispondente al periodo di ritorno  $T_R$  desiderato;

$T_{R1}, T_{R2}$  sono i periodi di ritorno più prossimi a  $T_R$  per i quali si dispone dei valori  $p_1$  e  $p_2$  del generico parametro  $p$ .

I valori dei parametri  $a_g, F_0$  e  $T_C^*$  relativi alla pericolosità sismica su reticolo di riferimento nell'intervallo di riferimento sono forniti nelle tabelle riportate nell'ALLEGATO B.

Per un qualunque punto del territorio non ricadente nei nodi del reticolo di riferimento, i valori dei parametri  $p(a_g, F_0, T_C^*)$  d'interesse per la definizione dell'azione sismica di progetto possono essere calcolati come media pesata dei valori assunti da tali parametri nei quattro vertici della maglia elementare del reticolo di riferimento contenente il punto in esame, utilizzando come pesi gli inversi delle distanze tra il punto in questione ed i quattro vertici, attraverso la seguente espressione:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{p_i}{d_i}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i}}$$

nella quale:

$p$  è il valore del parametro d'interesse nel punto in esame;

$p_i$  è il valore del parametro d'interesse nell' $i$ -esimo punto della maglia elementare contenente il punto in esame;

$d_i$  è la distanza del punto in esame dall' $i$ -esimo punto della maglia suddetta.

Per tutte le isole, con l'esclusione della Sicilia, Ischia, Procida, Capri gli spettri sono definiti in base a valori di  $a_g, F_0, T_C^*$  uniformi su tutto il territorio di ciascuna isola."