Programma del corso di
Geometria e Algebra Computazionale
A.A. 2019/20 Università di Firenze

Giorgio Ottaviani

OBIETTIVI del corso: Introduzione costruttiva alla Geometria Algebrica. Apprendere metodi e tecniche computazionali per trattare polinomi e sistemi di equazioni polinomiali. Apprezzare le differenze del caso lineare con quello non lineare.

CAPACITA' e COMPETENZE: Conoscere le proprietà principali delle basi di Groebner. Saper effettuare una eliminazione di variabili e comprenderla tramite il risultante. Conoscere le prime proprietà delle varietà algebriche con particolare riguardo alle curve algebriche piane. Saper passare dalla descrizione parametrica a quella cartesiana di una varietà algebrica e comprendere le problematiche legate al passaggio inverso. Saper risolvere alcuni sistemi di equazioni polinomiali zerodimensionali, saper calcolare il numero di soluzioni reali in aritmetica esatta.

Contenuti:

Le basi di Groebner e l'algoritmo di Buchberger. Richiami sugli anelli noetheriani e teorema della base. Ordini monomiali e algoritmo di divisione. Ideali monomiali e basi di Groebner. Criterio di Buchberger ed algoritmo di Buchberger. Il problema di appartenenza di un elemento a un ideale.

L'eliminazione di variabili. Il teorema di eliminazione. Intersezione di ideali e algoritmo di calcolo, mcm e MCD. Radicale di un ideale.

Introduzione alle varietà algebriche Definizione di varietà algebrica e corrispondenza tra ideali e varietà. Topologia di Zariski. Il teorema degli zeri di Hilbert (NullStellenSatz). Il risultante. Il teorema di estensione. Interpretazione geometrica dell'eliminazione e Teorema di chiusura. Colorabilità di un grafo via basi di Groebner. Parametrizzazione di varietà algebriche. Equazioni parametriche e cartesiane per varietà algebriche. Ideali omogenei e varietà proiettive. Curve algebriche piane.

Il numero delle radici reali di un polinomio e la loro molteplicità in aritmetica esatta. Matrice compagna. Forma traccia di Killing e teorema cinese dei resti in ambito polinomiale. Il teorema di Sylvester sul numero delle radici reali di un polinomio.

Soluzione di sistemi polinomiali zero dimensionali, reali e complessi. Ideali zero dimensionali e loro decomposizione primaria. Diagonalizzazione simultanea. Soluzione di sistemi polinomiali zerodimensionali col metodo degli autovalori. La molteplicità di una radice. Estensione a più variabili del teorema di Sylvester.

Il corso è accompagnato da esercitazioni al computer, con il software Macaulay2 (M2)
http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/

Testi consigliati:
D.Cox, J.Little, D.O'Shea, Ideals, Varieties and Algorithms, Springer 1992, capp. 1,2,3,7,9
D.Cox, J.Little, D.O'Shea, Using Algebraic Geometry, Springer 1998, cap. 2
Sulla pagina Moodle sono disponibili le note del corso.
Modalità di esame: E' consigliato sostenere le prove intermedie che saranno svolte presso il

Laboratorio di Informatica con esercitazioni su M2. In alternativa si può sostenere l'esame orale, dove verrà richiesta la presentazione di un elaborato con il software M2, su una serie di esercizi assegnati al termine del corso.