

Equazione ADIMENSIONALE in s

J.16

$$\frac{1}{\alpha} \dot{s} = z \frac{1 + e^{-s/r}}{2} - \cos \theta$$

Analogo lavoro va fatto per la seconda eq. differenziale

$$A \frac{h_{ref}}{t_{ref}} \dot{h} = - \frac{(a s_{ref})^{4/3}}{(LK)^{1/2}} s^{4/3} \left(h_{ref} \left(h + \frac{e_i}{\rho_w} \frac{h_2}{h_{ref}} \right) \left(1 - e^{-\frac{s_{ref}}{s} s} \right) + \frac{d}{h_{ref}} \cdot h_{ref} \right)^{1/2} + \frac{Q_{in}}{Q_{ref}} Q_{ref}$$

$$\frac{A h_{ref}}{t_{ref} Q_{ref}} \dot{h} = - \frac{(a s_{ref})^{4/3}}{(LK)^{1/2}} \cdot \frac{h_{ref}^{1/2}}{Q_{ref}} \left(z (1 - e^{-s/r}) + \frac{d}{h_{ref}} \right)^{1/2} + \frac{Q_{in}}{Q_{ref}}$$

Poniamo ora

$$\frac{Q_{in}}{Q_{ref}} = \hat{Q}_{in} \quad (\text{adim.}), \quad \hat{d} = \frac{d}{h_{ref}} \quad (\text{adim.})$$

$$\beta = \frac{(a s_{ref})^{4/3}}{(LK)^{1/2}} \cdot \frac{h_{ref}^{1/2}}{Q_{ref}} \quad (\text{adim.})$$

e osserviamo che

$$\dot{z} = \dot{h} \quad e$$

$$\frac{A h_{ref}}{t_{ref} Q_{ref}} = 1$$

vedi (13)

In definitiva abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = -\beta \left[z(1 - e^{-s/r}) + \hat{d} \right]^{1/2} s^{4/3} + \hat{Q}_{in} \\ \frac{1}{\alpha} \dot{s} = z \frac{1 + e^{-s/r}}{2} - \cos \theta \end{cases} \quad (14)$$

da risolvere con le c.i.

$$(15) \quad \begin{cases} s(0) = 0 \\ z(0) = z_0 = h_0 + \frac{h_2}{H} \end{cases} \quad \left(\text{dove } h_0 \text{ è adim.} \right)$$

È importante sottolineare che $s(t)$ è lo spessore dello strato permeabile. Quindi le soluzioni di (14)-(15) hanno senso fisico solo se $s(t)$ è non-negativo.

Osservazione: Perché lo strato permeabile possa "aprirsi" a $t=0$ occorre che $\dot{s}(0) > 0$ ed essendo $s(0) = 0$ la (14)₂ implica che

$$h(0) + \frac{h_2}{H} > \cos \theta \quad (16)$$

(cioè che nel lago vi sia acqua a sufficienza).

Riscritta in modo dimensionale la (16) diventa

J.18

$$h(0) + \frac{\rho_w}{\rho_i} h_2 > h_{ref} \cos \theta$$

Notiamo che

$$h(0) + \frac{\rho_w}{\rho_i} h_2 > h(0) + h_2 > h_{ref} > h_{ref} \cos \theta$$

Quindi la condizione necessaria è soddisfatta se

$$h(0) + h_2 > h_{ref} = \frac{\rho_i}{\rho_w} H$$

Nel caso degli eventi che hanno origine dalla caldera Est della Skaftarjökull si ha $\rho_i/\rho_w H \cong 423$ e $h_2 \cong 400$ m

Quindi ogni valore $h(0)$ tale che

$$h(0) > 23 \text{ m}$$

soddisfa la condizione necessaria per l'innescarsi del fenomeno. In effetti in base ai dati sperimentali (quantità globale di acque librate e area stimata del lago) $h(0)$ è sicuramente maggiore di 23 m con valori stimati fra 70 e 100 m

Una volta noto il sistema è nota anche la portata istantanea

J.19

$$Q(t) = Q_{ref} \beta J^{4/3}(t) \left(z(t) \left(1 - e^{-\frac{sc(t)}{y}} \right) + \hat{d} \right)^{1/2}$$

che potremo confrontare con le idrografe osservate

Per procedere osserviamo che il modello adimensionale contiene TRE parametri: α , β e γ . Poiché il modello (14) è fortemente non lineare la procedura di "best fitting" dei tre parametri può essere fatta con procedure numeriche: per ogni idrografe osservata la procedura fornisce i tre valori che danno la migliore approssimazione ai minimi quadrati.

Le simulazioni richiedono di fissare z_0 e \hat{d} che a loro volta richiedono h_{ref} e \bar{H} .

DATI
DISPONIBILI
IN
LETTERATURA

Parameter	Skaftá
d	550 m
A	4.5 km ²
\bar{H}	470 m
h_r	400 m
h_0	100 m
L	40 km

Event	α	β	γ
Skaftá 1982	74	0.2	5.5
Skaftá 1984	33	0.4	15.0
Skaftá 1986	54	0.4	7.1
Skaftá 1989	76	0.2	5.6
Skaftá 1991	56	0.2	6.3
Skaftá 1997	39	0.5	13.0
Skaftá 2002	60	0.2	5.5
Skaftá 2006	109	0.2	5.2
Skaftá 2008	104	0.2	5.5

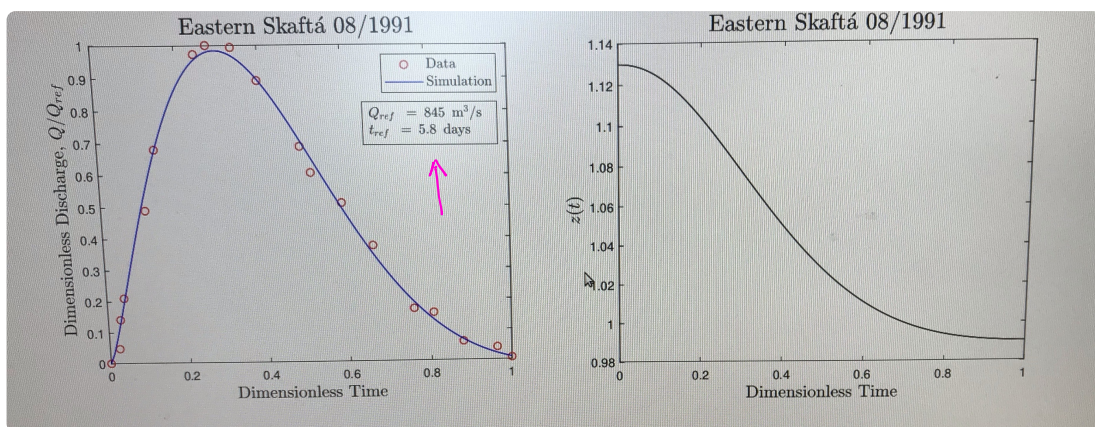
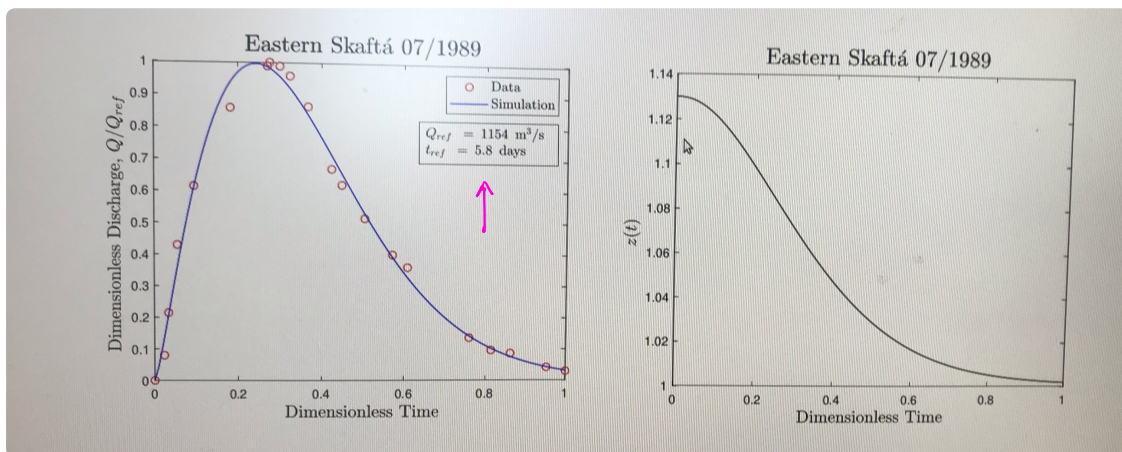
VALORI
"BEST
FIT"

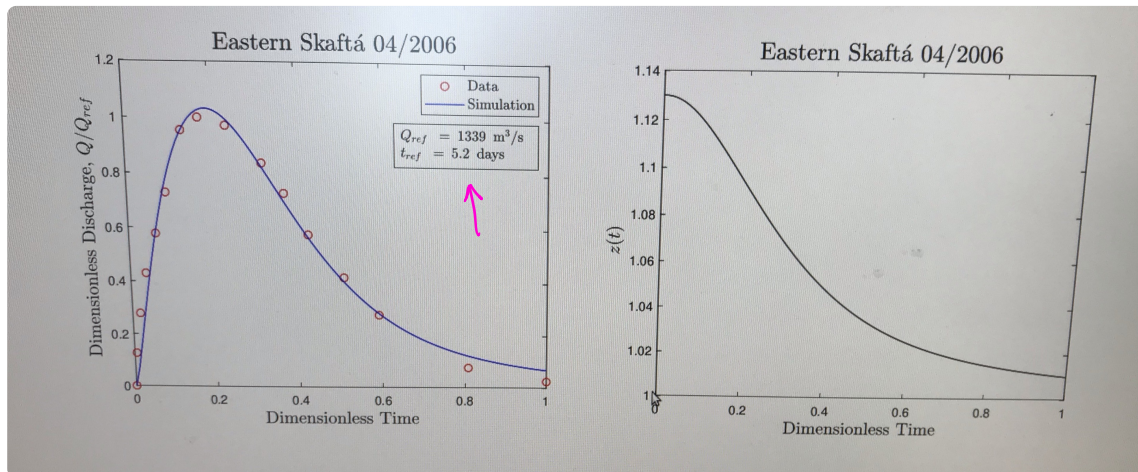
Usando i dati indicati nella prima tabella
 abbiamo finito z_0 , \hat{d} e h_{ref}

J:20

Parameter	Skaftá
\hat{d}	1.4
z_0	1.13
h_{ref}	420 m

SIMULAZIONI e CONFRONTO





NON-ESISTENZA DI SOLUZIONI STAZIONARIE (STABILI) PER IL SISTEMA (14)

Le eventuali soluzioni stazionarie del sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = -\beta \left[z(1 - e^{-s/r}) + \hat{d} \right]^{1/2} s^{4/3} + \hat{Q}_{in} \\ \frac{1}{\alpha} \dot{s} = z \frac{1 + e^{-s/r}}{2} - \cos \theta \end{cases}$$

si ottengono risolvendo il sistema

$$(17) \begin{cases} 0 = -\beta \left[z(1 - e^{-s/r}) + \hat{d} \right]^{1/2} s^{4/3} + \hat{Q}_{in} \\ 0 = z \frac{1 + e^{-s/r}}{2} - \cos \theta \end{cases}$$

Dalla (17)₂ segue

J.22

$$z = \frac{2 \cos \theta}{1 + e^{-s/\sigma}}$$

e quindi

$$s^{4/3} = \frac{\hat{Q}_{in}}{\beta} \left[\hat{d} + 2 \cos \theta \frac{(1 - e^{-s/\sigma})}{(1 + e^{-s/\sigma})} \right]^{1/2}$$

Cerchiamo numericamente soluzioni $s \geq 0$ per valori plausibili dei parametri:

$$\hat{Q}_{in} = 2.5 \times 10^{-3}, \quad \beta = 0.2, \quad \hat{d} = 1.4, \quad \cos \theta = .99$$

e variando γ nel range (5, 15). Infatti è in questo range che abbiamo ottenuto il best fit delle idroprofe osservate nei vari anni.

L'unico punto stazionario risulta essere $(s_{st}, z_{st}) \approx (0.04, 0.99)$ e il calcolo degli autovalori della Jacobiana fornisce due autovalori reali distinti e di segno opposto. Il risultato non cambia variando γ mentre variando β z_{st} resta praticamente identica, mentre un incremento di β di un ordine di grandezza provoca una diminuzione di s_{st} di un ordine di grandezza.

$$\begin{cases} \dot{z} = -\beta \left[z(1 - e^{-s/r}) + \hat{d} \right]^{1/2} s^{4/3} + \hat{Q}_{in} = F_2(s, z) \\ \frac{1}{\alpha} \dot{s} = z \frac{1 + e^{-s/r}}{2} - \cos \theta = F_1(s, z) \end{cases}$$

Poniamo $\dot{z} = F_2(s, z)$, $\dot{s} = F_1(s, z)$ e

$$w_1 = s - s_{st}, \quad w_2 = z - z_{st}, \quad F_i(s, z) = F_i(w_1 + s_{st}, w_2 + z_{st})$$

$$F_i(s, z) \cong \underbrace{F_i(s_{st}, z_{st})}_{=0} + \nabla F_i(s_{st}, z_{st}) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad i=1, 2$$

$$\dot{w}_1 \cong \nabla F_1(s_{st}, z_{st}) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{w}_2 \cong \nabla F_2(s_{st}, z_{st}) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

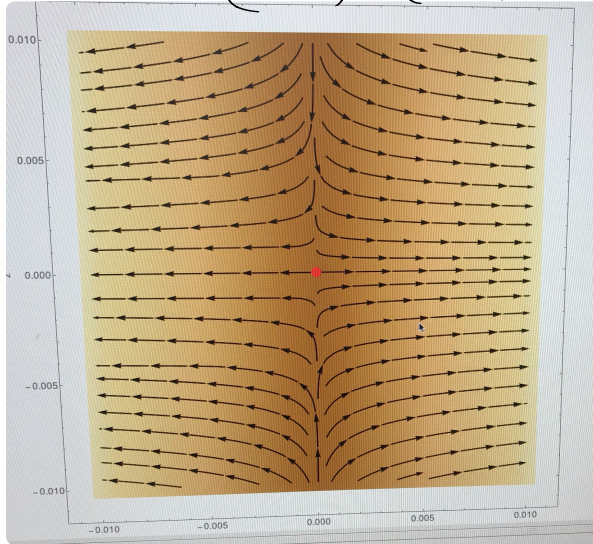
$$\partial_s F_1 = -\frac{e^{-s/r} z}{2r}, \quad \partial_z F_1 = \frac{1}{2}(1 + e^{-s/r})$$

$$\partial_s F_2 = -\frac{e^{-s/r} s^{4/3} z \beta}{2r \left(z(1 - e^{-s/r}) + \hat{d} \right)^{1/2}} - \frac{4}{3} s^{1/3} \beta \left(z(1 - e^{-s/r}) + \hat{d} \right)^{1/2}$$

$$\partial_z F_2 = -\frac{(1 - e^{-s/r}) s^{4/3} \beta}{2 \left(z(1 - e^{-s/r}) + \hat{d} \right)^{1/2}}$$

Valutando la Jacobiana in (S_{st}, z_{st}) per vari valori di γ si trova

$$(\lambda_1, \lambda_2) \approx (0.99, -0.11) \quad \leftarrow \text{PUNTO DI SELLA}$$



SOLUZIONE STAZIONARIA

INSTABILE

MODELLO PER L'INNESCO DEL FENOMENO E LE OSCILLAZIONI DEL LAÇO SOGGIACIALE

L'equilibrio statico del ghiacciaio (che precede il fenomeno) è regolato dall'eq. di bilancio delle forze

$$- \underbrace{aL\bar{H}\rho_i g}_{\text{peso del ghiacciaio}} + \underbrace{aL p_{im}}_{\text{spinta di pressione}} + \underbrace{\Phi}_{\text{attrito laterale}} = 0 \quad (18)$$

dove p_{im} cresce positivamente (ma molto lentamente) per via della ricarica Q_{im} . La grandezza che si oppone alla spinta di pressione è Φ e il fenomeno

non ha inizio fino a che

J.25

$$|\Phi| < \underbrace{\Phi_{\max}}_{\text{valore critico}}$$

Ritorniamo la (18) in forma adimensionale: posto

$$\hat{\phi} = \phi / (aL\bar{H}\rho_i g) \quad \text{e ricordando che}$$

$$P_{in}(t) = \rho_w g \left(h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} h_2 \right)$$

la (18) diventa

$$-1 + \underbrace{\frac{\rho_w}{\rho_i} \frac{1}{\bar{H}}}_{=1/h_{ref}} \left(h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} h_2 \right) + \hat{\phi} = 0$$

Quindi, ricordando che $z(t) = \frac{h(t)}{h_{ref}} + \frac{\rho_i}{\rho_w} \frac{h_2}{h_{ref}}$, abbiamo

$$-1 + z(t) + \hat{\phi} = 0 \quad (19)$$

Allora la condizione di criticità diventa

$$| -z(t) + 1 | < \hat{\phi}_{\max} = \frac{\Phi_{\max}}{aL\bar{H}\rho_i g} \quad (20)$$

Supponiamo che $h(t) = 0$ (cioè il lago è vuoto) J.26

allora

$$z(t) = \frac{\rho_i}{\rho_w} \frac{h_2}{h_{ref}} = \frac{h_2}{H} \leq 1$$

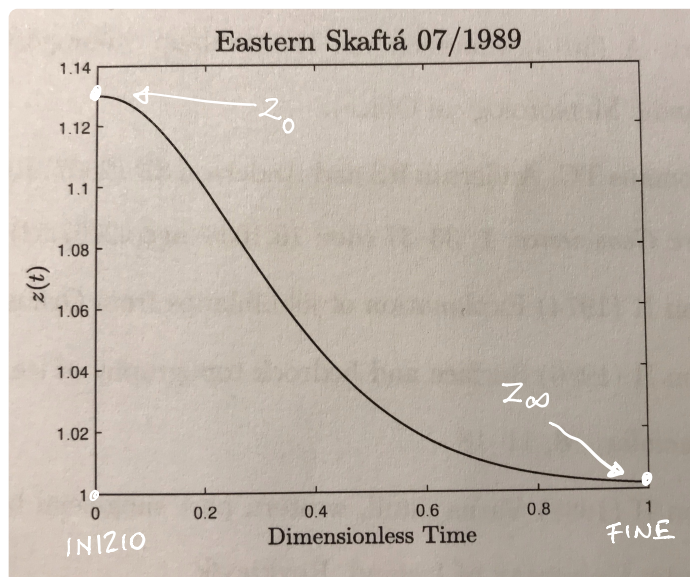
Quindi la (20) è significativa solo se $z > 1$ per cui la condizione si scrive

$$z(t) < 1 + \hat{\Phi}_{max}$$

È allora naturale assumere come condizione iniziale (inizio dell'alluvione)

$$z(0) = z_0 = 1 + \hat{\Phi}_{max} \quad (21)$$

L'equazione che governa l'evoluzione di z durante l'alluvione consente di stimare z_0 cioè il livello minimo raggiunto dal lago alla fine del fenomeno



EVOLUZIONE
DI $z(t)$
DURANTE IL
FENOMENO
ALLUVIONALE

OSCILLAZIONI DEL LAGO (PERIODO DI RICARICA).

Eventi consecutivi possono essere schematizzati in questo modo



$t_a - t_c = \text{durata della ricarica (2-3 anni)}$

$t_c - t_0 = \text{durata dell'alluvione (5-6 giorni)}$

La ricarica del lago è descritta dalle semplicissime equazioni

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{Q}_{in} \\ z(t_c) = z_{\infty} \end{cases} \Rightarrow z(t) = z_{\infty} + \int_{t_c}^t \hat{Q}_{in} d\tilde{t} \quad (22)$$

dove $\hat{Q}_{in} = \frac{Q_{in}}{Q_{ref}}$

e dove z_{∞} , ottenuto risolvendo il sistema che regola lo svuotamento del lago, è il livello raggiunto del lago alla fine dell'alluvione.

Assumendo $Q_{in} = \text{costante}$ e $T = t_c - t_0$ J.28
 dalla (21) segue

$$z(t_a) = z_\infty + \hat{Q}_{in} T \quad (\text{con } T \text{ adimensionale})$$

Ma $z(t_a) = z_0$ valore critico del lago che dà luogo ad una nuova alluvione. Ricordando che $Q_{ref} = \frac{A h_{ref}}{t_{ref}}$

$$z_0 - z_\infty = \frac{Q_{in}}{A h_{ref}} t_{ref} T$$

dove $t_{ref} T$ è il tempo (dimensionale) necessario alla ricarica.

Abbiamo analizzato 10 eventi per i quali avevamo dati disponibili

Subseq. ev.	T(days)	$Q_{in}T(Gl)$	$\frac{Q_{in}T}{h_{ref}A}$	$z_0 - z_\infty$	% err.
1982-84	949	336	0.18	0.12	33
1984-86	826	239	0.13	0.21	17
1986-89	957	279	0.15	0.18	23
1989-91	747	219	0.12	0.13	13
2006-08	908	295	0.16	0.12	17

DATI DI CAMPO

MODELLO

Controllando il margine di errore presente nei dati di campo, la deviazione del modello dai dati è più che accettabile. Un ulteriore controllo sulla bontà del modello è stato fatto sottoponendo al test statistico del χ^2 il fitting delle idrografe reali con quelle del modello

J.29

Event	% of confidence	source of the experimental data
Skaftá 1982	73	Zóphóniasson (2002)
Skaftá 1984	20	Zóphóniasson (2002)
Skaftá 1986	16	Zóphóniasson (2002)
Skaftá 1989	94	Zóphóniasson (2002)
Skaftá 1991	46	Zóphóniasson (2002)
Skaftá 1997	14	Zóphóniasson (2002)
Skaftá 2002	95	Zóphóniasson (2002)
Skaftá 2006	40	Einarsson (2009b)
Skaftá 2008	40	Einarsson (2009b)