Modello climatico globale della Terra

E' il modello più semplice possibile per descrivere il clima medio osservato sulla Terra non solo attualmente ma anche su scala "paleoclimatica".

L'ipotesi fondamentale e' che il clima osservato (ora o nel passato) sia una soluzione stazionaria STABILE di un'equazione di bilancio energetico in cui la funzione incognita è la Temperatura media annua del pianeta

Sia $R_i(T)$ il flusso di calore "entrante" dovuto all'irraggiamento solare e $R_o(T)$ il flusso "uscente", principalmente dovuto al decadimento radioattivo di alcuni isotopi (Torio 232, Uranio 238 e 235, Potassio 40)

Eq. di bilancio energetico globale

$$(1) \qquad c\,\frac{dT}{dt} = \underbrace{Q_o\big(1-\alpha(T)\big)}_{R_i\,\left\{\substack{\text{radiazione}\\ \text{in arrivo}\\ \text{al suolo}}\right\}} - \underbrace{\sigma\, g(T)\, T^4}_{\left\{\substack{\text{radiazione}\\ \text{in uscita}\\ \text{al suolo}}\right\}\, R_o} \equiv E(T)$$

T = temperatura annua media del sistema Terra-Atmosfera-Oceani (TAO)

Q_o = costante solare (flusso medio globale di energia solare)

(2)

$\alpha(T)$ = albedo planetario (o potere riflettente) $\in [0,1]$

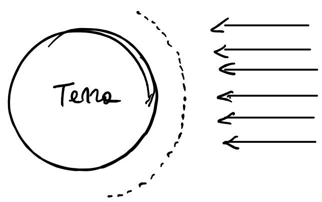
σ = costante di Stefan - Boltzmann $\left(\simeq 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}\right)$

$g(T)$ = "grayness" del sistema TAO, cioè la sua deviazione dalla radiazione di corpo nero rappresentata dal termine σT^4 (Legge di Stefan - Boltzmann)

C = capacità termica specifica dell'atmosfera $= \rho_a c_p d$
($d \simeq 10^4$ m spessore atmosfera)

INTERPRETAZIONE FISICA

RADIAZIONE "IN ARRIVO" AL SUOLO : $C_0 \simeq 1378 \frac{W}{m^2}$ rappresenta il flusso di energia alla sommità dell'Atmosfera Terrestre



La radiazione non è costante durante l'anno (la distanza Terra - Sole non è costante)

C_0 è un valore medio annuo che va mediato su tutta la superficie terrestre $4\pi a_T^2$, $a_T \cong 6400$ Km (raggio terrestre)

La Terra espone alla radiazione una sezione di area $\approx \pi a_T^2$. Quindi il flusso riferito alla superficie Terrestre è

$$Q_0 = C_0 \frac{\pi a_T^2}{4\pi a_T^2} = C_0/4 \cong 342 \frac{W}{m^2}$$

Questo flusso non raggiunge la superficie Terrestre al 100%
C'è una parte assorbita dall'Atmosfera ($\simeq 22\%$), una parte viene riflessa nello spazio esterno ($\simeq 33\%$). Solo il 45% raggiunge la superficie e riscalda le tre componenti del sistema Terra-Oceano.

Il fattore $1-\alpha(T)$ rappresenta proprio la riduzione del valore di Q_0 dovuto ad una molteplicità di fattori.
Per nevi e ghiacciai $\alpha(T)$ ha un valore fra 0.8 e 0.9

Problema: come scegliere la funzione $\alpha(T)$? La strategia più semplice è il cosiddetto

ice-albedo feedback

Fissiamo due valori di riferimento $T_c < T_e$ dove $T_c \approx 265\,K$ e $T_e \approx 285\,K$. Trattandosi di due temperature medie globali per definizione

$T_c \rightsquigarrow$ Terra completamente coperta di ghiaccio

$T_e \leftrightsquigarrow$ Terra completamente libera dal ghiaccio

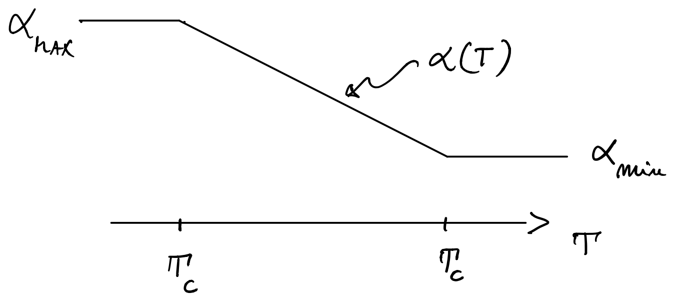
Si assume poi

$$\alpha(T) = \alpha_{max} \text{ per } T < T_c \quad e \quad \alpha(T) = \alpha_{min} \text{ per } T > T_e$$

e infine $\alpha(T)$ decrescente per $T_c < T < T_e$

Scelte più comuni

$$\alpha(T) = \begin{cases} \alpha_{MAX}, & T < T_c \\ \alpha_{MAX} - \dfrac{T - T_c}{T_e - T_c}\left(\alpha_{MAX} - \alpha_{min}\right), & T_c < T < T_e \\ \alpha_{min}, & T > T_e \end{cases}$$



si possono scegliere anche funzioni decrescenti più "smooth" ma il concetto è lo stesso: l'albedo decresce ⟷ cresce in relazione alla diminuzione ⟷ aumento della copertura glaciale

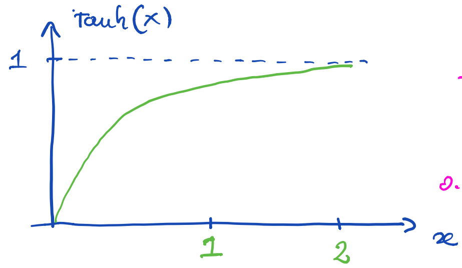
La dipendenza di g da T esprime il cosiddetto "effetto serra", cioè il processo mediante il quale la radiazione emessa R_o è parzialmente assorbita dai gas presenti in atmosfera.

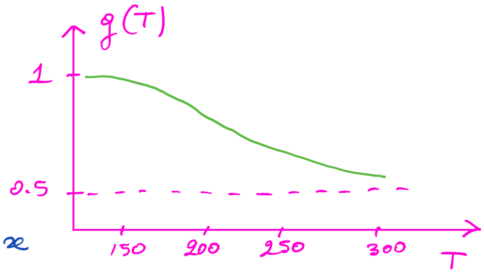
Scegliamo

$$g(T) = 1 - m \tanh\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\alpha}\right]$$

dove T_0 è un fattore di scala, $m = 0.5$ (cioè si ha una riduzione del 50% del potere disperdente dell'Atmosfera) e α è un opportuno esponente.

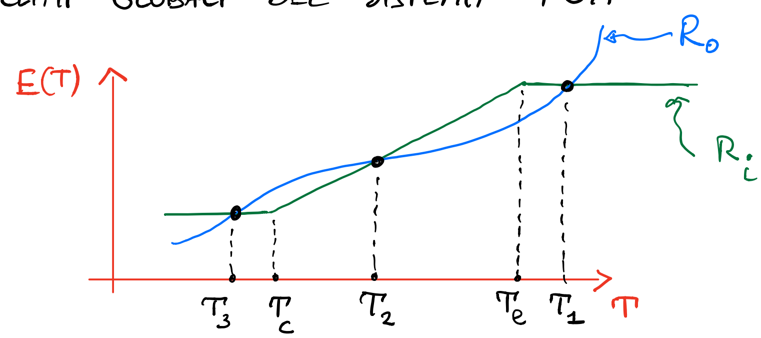
Poiché





per T crescente $g(T)$ decresce da 1 a 0.5; naturalmente i valori estremi corrispondenti rispettivamente a $T=0$ e $T=\infty$ sono privi di significato fisico e l'effettivo comportamento di $g(T)$ dipende dalla scelta dei parametri α e T_0 che si ottengono, ad esempio, con misurazioni della percentuale di CO_2 presente in Atmosfera e con misurazioni satellitari della radiazione infrarossa emessa dalla Terra (per i dettagli vedere Sellers J. of Applied Meteorology, vol 8, 1968).

GLI ZERI DELLA FUNZIONE $E(T)$ RAPPRESENTANO I POSSIBILI CLIMI GLOBALI DEL SISTEMA TOA



Il modello mostra che sono possibili TRE CLIMI differenti: supponiamo che $T = T_1$ rappresenti il clima attuale della Terra. Allora T_2 e T_3 rappresentano climi più freddi (eventualmente ere glaciali se $T_3 < T_c$).
Infatti sia l'esistenza che la posizione di T_3, T_2 e T_1 dipende dai valori dei vari parametri, in particolare da $f(T)$.

La stabilità degli equilibri si può fare molto facilmente analizzando il segno di $\dot{T}$:

T_3 è stabile: per $T < T_3$ si ha $R_o < R_i \Rightarrow \dot{T} > 0$
mentre per $T > T_3$ si ha $R_o > R_i \Rightarrow \dot{T} < 0$

T_2 è instabile: per $T < T_2$ si ha $R_o > R_i \Rightarrow \dot{T} < 0$
mentre per $T > T_2$ si ha $R_o < R_i \Rightarrow \dot{T} > 0$

T_1 è stabile: per $T < T_1$ si ha $R_o < R_i \Rightarrow \dot{T} > 0$
mentre per $T > T_1$ si ha $R_o > R_i \Rightarrow \dot{T} < 0$

E' utile anche sviluppare l'analisi lineare: sia $\theta(t)$ una perturbazione di un generico equilibrio T_0. Allora la soluzione perturbata verifica l'equazione

$$c \frac{d}{dt}\left(T_0+\theta(t)\right) = R_i\left(T_0+\theta(t)\right) - R_o\left(T_0+\theta(t)\right) \simeq$$

$$\approx \underbrace{R_i(T_0) - R_o(T_0)}_{=0} + \left(\frac{dR_i}{dT} - \frac{dR_o}{T}\right)_{T=T_0}\theta$$

che si riscrive

$$\dot{\theta} \cong \lambda\,\theta \qquad \text{(eq. linearizzata del bilancio termico)}$$

dove
$$\lambda = -\frac{1}{C}\left[Q_0 \left.\frac{d\alpha}{dT}\right|_{T=T_0} + \sigma\left(4g(T_0)T_0^3 + T_0^4\left.\left(\frac{dg}{dT}\right)\right|_{T=T_0}\right)\right]$$

La soluzione dell'eq. linearizzata è ovviamente

$$\theta(t) = \theta_0 \exp\left(\lambda t\right)$$

e si ha stabilità o instabilità secondo che $\lambda<0$ opp. $\lambda>0$.

Notiamo che

$$\alpha_1 = \left.\frac{d\alpha}{dT}\right|_{T_i} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=1,3 \\ -\dfrac{\alpha_{max}-\alpha_{min}}{T_e - T_c}, & i=2 \quad \left(T_2\in(T_c,T_e)\right) \end{cases}$$

Per $\alpha_{max}\cong 0.9$, $\alpha_{min}\cong 0.2$ e $T_e - T_c \cong 20$ K ($T_c\cong 263$ K, $T_e \cong 283$ K) si ha $\alpha_1 \simeq -3.5\times10^{-2}$. Quindi, posto

$$g_1(T_i) = 4g(T_i)T_i^3 + T_i^4\left.\left(\frac{dg}{dT}\right)\right|_{T=T_i},$$

$$\lambda(T=T_i) = -\frac{\sigma\, g_1(T_i)}{c} < 0 \quad \text{per } i=1,3 \iff g_1(T_i)>0$$

Poiché $\frac{dg}{dT} < 0$, $g_1(T_i) > 0$ se $4g(T_i) > -T_i^3 \left(\frac{dg}{dT}\right)\Big|_{T=T_i}$

In effetti, usando i valori attualmente stimati, $\frac{dg}{dT}$ è molto piccola e quindi la condizione $g_1(T_i) > 0$ è da ritenersi generalmente soddisfatta.

Nel caso $T = T_2$ si ha

$$\lambda(T=T_2) = \frac{Q_0 * 3.5 * 10^{-2}}{c} - \sigma \frac{g_1(T_2)}{c}$$

e quindi

$$\lambda(T=T_2) > 0 \iff Q_0 > \frac{\sigma g_1(T_2)}{3.5} * 10^2$$

D'altra parte $Q_0 \simeq 340 \frac{W}{m^2}$ e $\sigma g_1 \in (0,1)$ per cui $\lambda(T=T_2) > 0$!

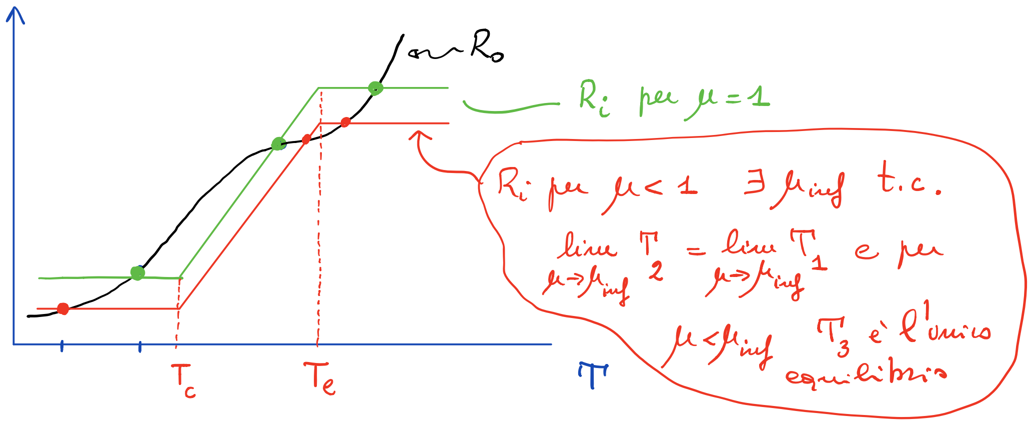
COSA SUCCEDE SE SI VARIA DI POCO LA COSTANTE SOLARE Q_0 ?

Sulla scala dei miliardi di anni (cioè dell'età della Terra) Q_0 può variare se variano (come effettivamente sembra sia accaduto) gli elementi orbitali; questi sono 6 parametri che determinano in modo univoco l'orbita di ogni corpo celeste attorno ad un secondo corpo (in questo caso il SOLE).

I parametri sono i tre angoli di Eulero (nutazione, precessione e rotazione propria), il tempo di passaggio al perielio, la distanza al perielio e l'eccentricità dell'orbita.

C'è evidenza che gli elementi orbitali nelle precedenti ere glaciali fossero diversi dagli attuali.

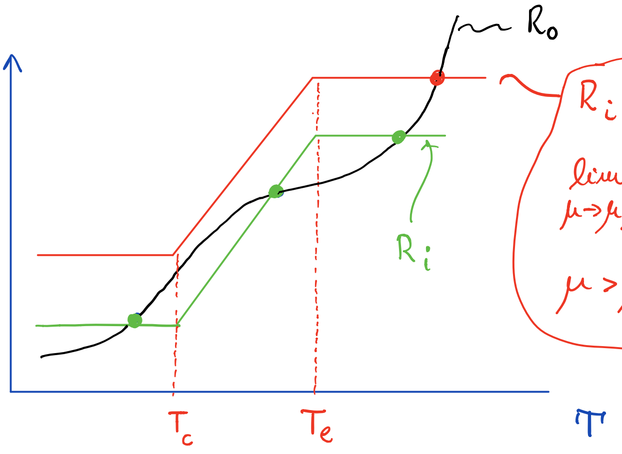
Il modo più semplice di introdurre questo effetto nel modello è quello di sostituire Q_0 con μQ_0 dove μ è un parametro positivo. Questa modifica non altera la forma del profilo di R_0 ma produce un suo abbassamento rigido (se $\mu < 1$) o un suo innalzamento (se $\mu > 1$)



Per $\mu < 1$ T_3 si è spostato a sinistra, T_2 si è spostato a destra e T_1 a sinistra. Per μ suff. minore di 1, T_3 esiste sempre ma T_2 e T_1 cessano di esistere.

Quindi, se T_1 rappresenta il clima attuale esiste un valore $\mu_{inf} < 1$ tale che se $\mu < \mu_{inf}$ il clima attuale diventa instabile $(T_2 = T_3)$ e si ha una transizione di T verso T_3 (Terra totalmente coperta di ghiaccio), con T_3 che rimane stabile!

Vediamo ora le conseguenze di $\mu > 1$:



R_i per $\mu > 1$ $\exists \mu_{sup}$ t.c. $\lim\limits_{\mu \to \mu_{sup}} T_3 = \lim\limits_{\mu \to \mu_{sup}} T_2$ e per $\mu > \mu_{sup}$ T_1 è l'unico equilibrio

Per μ suff. grande, $\mu > \mu_{sup}$ gli equilibri T_3 e T_2 cessano di esistere e T_1 si sposta a destra (Terra surriscaldata) con T_1 che resta stabile.

Come si vede le variazioni di μ producono effetti poco piacevoli in ogni caso.

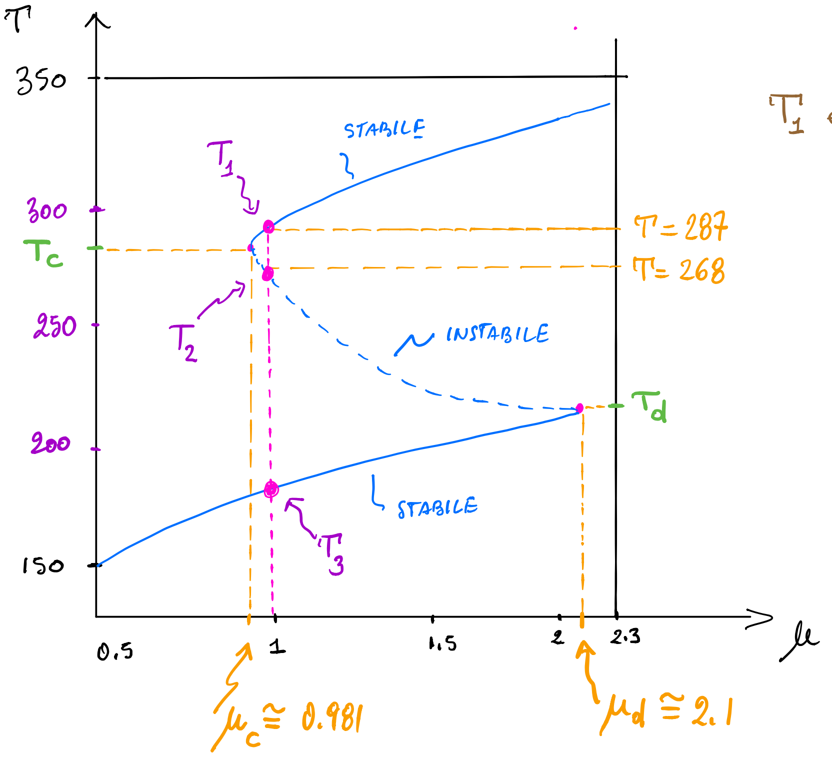
OSSERVAZIONE 1. Si noti come sia proprio il meccanismo dell'ice-albedo feedback che determina l'instabilità di T_2 perché il feedback è POSITIVO: un piccolo aumento di T riduce la copertura glaciale riducendo così l'albedo aumentando di conseguenza la radiazione in arrivo con conseguente ulteriore aumento di T

OSSERVAZIONE 2. Questo modello non lineare, semplice e 1-dimensionale, mostra l'esistenza di equilibri multipli ma non è in grado di predire "cicli" climatici (ere glaciali seguite da ere temperate). A tale scopo serve un modello almeno 2-dimensionale

E' evidente che μ è un parametro di biforcazione. Lo studio del luogo degli equilibri

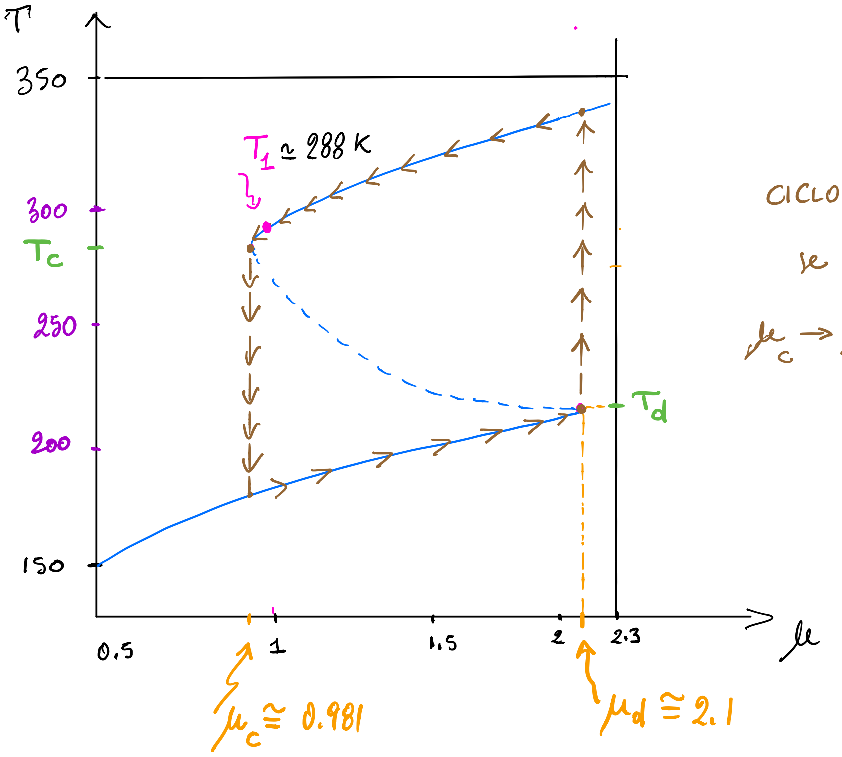
$$E(\mu, T) = \mu Q_0 (1 - \alpha(T)) - \sigma g(T) T^4 = 0$$

può essere fatto solo numericamente. Usando valori disponibili in letteratura si può ottenere il seguente diagramma di biforcazione



T_1 è il clima attuale!

Per $\mu = 1$ ci sono TRE soluzioni. Si noti (μ_d, T_d) che è un punto di biforcazione, (μ_c, T_c) che è un punto di inversione.
E' evidente la possibilità di un ciclo di isteresi.



CICLO D'ISTERESI

se

$\mu_c \rightarrow \mu_d \rightarrow \mu_c$

E' attualmente possibile ricostruire, attraverso la misurazione dei rapporti isotopici del deuterio in colonne di ghiaccio antartico, le variazioni di Q_0 negli ultimi 740.000 anni. L'analisi spettrale delle misure mostra chiaramente variazioni periodiche della Temperatura della Terra (almeno 6÷7 glaciazioni nel Pleistocene con intervalli "freddi" variabili fra 40.000 e 100.000 anni).

E' proprio la presenza nel modello della possibilità che si generi un ciclo di isteresi che forma la base per la teoria di Milankovitch sullo sviluppo delle glaciazioni (variazione periodica di Q_0 confermata dalle misure di CO_2 nelle carote di ghiaccio antartico).