Appunti per Geometria e Algebra Computazionale
1. Generalità sull'anello dei polinomi

Corso di Laurea in Matematica, Università di Firenze, 2019/20

Giorgio Ottaviani

7 marzo 2020

Clicca per audio, usa "spazio" per pausa

Sia K un campo. Siamo interessati all'anello dei polinomi $K[x_1, \ldots, x_n]$. Come esempi consideriamo $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ (quest'ultimo campo con p primo, $p \gg 0$ è molto utilizzato in computer algebra e può simulare con maggiore efficienza un campo di caratteristica zero quando i coefficienti dei polinomi in gioco sono "piccoli"). Useremo la seguente proprietà, nota dai corsi di Algebra:

$K[x_1, \ldots, x_n]$ è un UFD

Clicca per audio, usa "spazio" per pausa

Sia K un campo. Siamo interessati all'anello dei polinomi $K[x_1, \ldots, x_n]$. Come esempi consideriamo $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ (quest'ultimo campo con p primo, $p \gg 0$ è molto utilizzato in computer algebra e può simulare con maggiore efficienza un campo di caratteristica zero quando i coefficienti dei polinomi in gioco sono "piccoli"). Useremo la seguente proprietà, nota dai corsi di Algebra:

Teorema

Gauss $K[x_1, \ldots, x_n]$ è un dominio a fattorizzazione unica (UFD) cioè ogni polinomio si decompone in modo unico come prodotto di fattori irriducibili.

Clicca per audio, usa "spazio" per pausa

Ricordiamo che un anello A si dice noetheriano [1] se ogni suo ideale è finitamente generato. Questo equivale alla condizione della catena ascendente, cioè ogni catena ascendente di ideali $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ è stazionaria nel senso che $\exists\ n$ tale che $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$
In particolare ogni campo K è noetheriano perché gli unici suoi ideali sono 0 e K.

[1] in ricordo di Emmy Noether (1882-1935)

$K[x_1, \ldots, x_n]$ è Noetheriano

Clicca per audio, usa "spazio" per pausa

Ricordiamo che un anello A si dice noetheriano [1] se ogni suo ideale è finitamente generato. Questo equivale alla condizione della catena ascendente, cioè ogni catena ascendente di ideali $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ è stazionaria nel senso che $\exists\ n$ tale che $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$
In particolare ogni campo K è noetheriano perché gli unici suoi ideali sono 0 e K.

Teorema

Teorema della base di Hilbert.(Basissatz) Sia R un anello.

$$R \text{ è noetheriano} \Longrightarrow R[x] \text{ è noetheriano}$$

[1] in ricordo di Emmy Noether (1882-1935)