Lezione n. 4: Serie di funzioni –parte 2–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 10/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni
non sarà sempre omogenea, in dipendenza
dell'apparecchio usato per le loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 10/03/2020

Convergenza totale

Introduciamo una nuova nozione di convergenza che implica sia la convergenza assoluta che la convergenza uniforme.

Convergenza totale

Introduciamo una nuova nozione di convergenza che implica sia la convergenza assoluta che la convergenza uniforme.

Definizione (convergenza totale)

Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ se esiste una serie numerica, a termini positivi, convergente $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \geq n_0$ e $\forall x \in I$

Convergenza totale

Introduciamo una nuova nozione di convergenza che implica sia la convergenza assoluta che la convergenza uniforme.

Definizione (convergenza totale)

Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ se esiste una serie numerica, a termini positivi, convergente $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \geq n_0$ e $\forall x \in I$

- Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in $I \Rightarrow$ essa converge assolutamente su I, $\forall x \in I$ (questo segue dal criterio del confronto e di convergenza assoluta per le serie numeriche)

Convergenza totale

Introduciamo una nuova nozione di convergenza che implica sia la convergenza assoluta che la convergenza uniforme.

Definizione (convergenza totale)

Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ se esiste una serie numerica, a termini positivi, convergente $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \geq n_0$ e $\forall x \in I$

- Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in $I \Rightarrow$ essa converge assolutamente su I, $\forall x \in I$ (questo segue dal criterio del confronto e di convergenza assoluta per le serie numeriche)

- In particolare è ben definita la funzione somma $f(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$

Convergenza totale

Introduciamo una nuova nozione di convergenza che implica sia la convergenza assoluta che la convergenza uniforme.

Definizione (convergenza totale)

Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ se esiste una serie numerica, a termini positivi, convergente $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \geq n_0$ e $\forall x \in I$

- Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in $I \Rightarrow$ essa converge assolutamente su I, $\forall x \in I$ (questo segue dal criterio del confronto e da convergenza assoluta per le serie numeriche)

In particolare è ben definita la funzione somma $f(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$

Osservazione

Convergenza totale $\Rightarrow$ Convergenza uniforme

<u>Osservazione</u>

Se ogni $f_n(x)$ è limitata su I, allora la più piccola serie numerica che domina $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |f_n(x)|$ (e quindi $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)\right|$) è quella per cui il termine generale c_n è dato da:

$$\boxed{c_n = \sup \{ |f_n(x)| : x \in I \}}$$

<u>osservazione</u>

Se ogni $f_n(x)$ è limitata su I, allora la più piccola serie numerica che domina $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |f_n(x)|$ (e quindi $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)\right|$) è quella per cui il termine generale c_n è dato da:

$$c_n = \sup\{|f_n(x)| : x \in I\}$$

Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ converge allora si ha anche la convergenza uniforme della serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$

Osservazione

Se ogni $f_n(x)$ è limitata su I, allora la più piccola serie numerica che domina $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |f_n(x)|$ (e quindi $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)\right|$) è quella per cui il termine generale c_n è dato da:

$$c_n = \sup \{ |f_n(x)| : x \in I \}$$

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converga totalmente su un insieme I

Osservazione

Se ogni $f_n(x)$ è limitata su I, allora la più piccola serie numerica che domina $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |f_n(x)|$ (e quindi $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)\right|$) è quella per cui il termine generale c_n è dato da:

$$c_n = \sup \{ |f_n(x)| : x \in I \}$$

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converga totalmente su un insieme I è che sia convergente la serie numerica data da $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ dove $c_n = \sup \{ |f_n(x)| : x \in I \}$

Osservazione

Se ogni $f_n(x)$ è limitata su I, allora la più piccola serie numerica che domina $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |f_n(x)|$ (e quindi $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)\right|$) è quella per cui il termine generale c_n è dato da:

$$c_n = \sup\{ |f_n(x)| : x \in I \}$$

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converga totalmente su un insieme I è che sia convergente la serie numerica data da $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ dove $c_n = \sup\{ |f_n(x)| : x \in I \}$

Esempio 3

Consideriamo $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n \ln\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right)}$

Osservazione

Se ogni $f_n(x)$ è limitata su I, allora la più piccola serie numerica che domina $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |f_n(x)|$ (e quindi $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)\right|$) è quella per cui il termine generale c_n è dato da:

$$c_n = \sup\{ |f_n(x)| : x \in I \}$$

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converga totalmente su un insieme I è che sia convergente la serie numerica data da $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ dove $c_n = \sup\{ |f_n(x)| : x \in I \}$

Esempio 3

il fatto che il termine generico della serie vada a zero, nel caso $|x| \leq 1$, è conseguenza del conto nella pagina successiva

Consideriamo $\sum_{n=2}^{+\infty} n \ln\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right)$. Osserviamo che il termine generale tende a zero se e solo se $|x| \leq 1$.

Osservazione

Se ogni $f_n(x)$ è limitata su I, allora la più piccola serie numerica che domina $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |f_n(x)|$ (e quindi $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)\right|$) è quella per cui il termine generale c_n è dato da:

$$c_n = \sup\{ |f_n(x)| : x \in I \}$$

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converga totalmente su un insieme I è che sia convergente la serie numerica data da $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ dove $c_n = \sup\{ |f_n(x)| : x \in I \}$

Esempio 3

il fatto che il termine generico della serie vada a zero, nel caso $|x| \leq 1$, è conseguenza del conto nella pagina successiva

Consideriamo $\sum_{n=2}^{+\infty} n \ln\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right)$. Osserviamo che il termine generale tende a zero se e solo se $|x| \leq 1$. Infatti se $|x| > 1 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right) \geq \ln\left(|x|^n / n(n-1)^2\right) = n\left(\ln|x| - \frac{\ln(n(n-1)^2)}{n}\right)$

quindi la serie può convergere in $x \iff x \in [-1, 1]$

quindi la serie può convergere in $x \iff x \in [-1, 1]$

Allora se $x \in [-1, 1]$ si ha che:

$$\boxed{f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right) \leq n \ln\left(1 + \frac{1}{n(n-1)^2}\right)}$$

quindi la serie può convergere in $x \iff x \in [-1,1]$

Allora se $x \in [-1,1]$ si ha che:

$$f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right) \leq n \ln\left(1 + \frac{1}{n(n-1)^2}\right)$$

$$\boxed{= n \cdot \frac{1}{n(n-1)^2} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n(n-1)^2}\right)}{\frac{1}{n(n-1)^2}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \leq \frac{1}{(n-1)^2}}$$

Quindi essendo $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ convergente, allora

si deduce che la serie assegnata è convergente per il criterio del confronto

quindi la serie può convergere in $x \iff x \in [-1,1]$

Allora se $x \in [-1,1]$ si ha che:

$$f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right) \leq n \ln\left(1 + \frac{1}{n(n-1)^2}\right)$$

$$= n \cdot \frac{1}{n(n-1)^2} \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n(n-1)^2}\right)}{\frac{1}{n(n-1)^2}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

Quindi essendo $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ convergente, allora

si deduce che la serie assegnata è convergente

Per il criterio del confronto e, poiché $\sup\{|f_n(x)| : x \in [-1,1]\} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$,

allora dalla convergenza di $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$ si evince anche la convergenza totale della serie data. ∎

quindi la serie può convergere in $x \iff x \in [-1,1]$

Allora se $x \in [-1,1]$ si ha che:

$$f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{|x|^n}{n(n-1)^2}\right) \leq n \ln\left(1 + \frac{1}{n(n-1)^2}\right)$$

$$= n \cdot \frac{1}{n(n-1)^2} \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n(n-1)^2}\right)}{\frac{1}{n(n-1)^2}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

Quindi essendo $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ convergente, allora

si deduce che la serie assegnata è convergente

per il criterio del confronto e, poiché $\sup\{|f_n(x)| : x \in [-1,1]\} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$,

allora dalla convergenza di $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$ si evince anche la convergenza totale della serie data. ■

Teorema (corollario)

Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ è una serie di funzioni con $f_n(x)$ tutte continue su I e tale serie converge totalmente a $f(x)$ su I. Allora f è continua su I.