Lezione n. 6: Serie di potenze –parte 2–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 11/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 11/03/2020

Serie di potenze

Esempio 2

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ ha raggio di convergenza 1 e non converge negli estremi $x=1$ e $x=-1$. ∎
(si può usare il criterio del rapporto per esempio)

Serie di potenze

Esempio 2

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ ha raggio di convergenza 1 e non converge negli estremi $x=1$ e $x=-1$. ■
(si può usare il criterio del rapporto per esempio)

Enunciamo il seguente criterio per lo studio delle serie di potenze

Teorema 2

Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Serie di potenze

Esempio 2

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ ha raggio di convergenza 1 e non converge negli estremi $x=1$ e $x=-1$.
(si può usare il criterio del rapporto per esempio) ■

Enunciamo il seguente criterio per lo studio delle serie di potenze

Teorema 2

Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Allora si ha che $\boxed{R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}$ con la convenzione che $\boxed{\begin{cases} R=0 \text{ se } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ R=+\infty \text{ se } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}}$

Serie di potenze

Esempio 2

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ ha raggio di convergenza 1 e non converge negli estremi $x=1$ e $x=-1$. ■
(si può usare il criterio del rapporto per esempio)

Enunciamo il seguente criterio per lo studio delle serie di potenze

Teorema 2

Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Allora si ha che $$R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$ con la convenzione che $\begin{cases} R=0 \text{ se } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ R=+\infty \text{ se } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$

Osservazione

Un altro criterio per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze si ottiene ricordando che se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, allora si ha che:

Serie di potenze

Esempio 2

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ ha raggio di convergenza 1 e non converge negli estremi $x=1$ e $x=-1$. ■
(si può usare il criterio del rapporto per esempio)

Enunciamo il seguente criterio per lo studio delle serie di potenze

Teorema 2

Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Allora si ha che
$$R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$
con la convenzione che
$$\begin{cases} R=0 \text{ se } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ R=+\infty \text{ se } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Osservazione

Un altro criterio per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze si ottiene ricordando che se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, allora si ha che:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

Serie di potenze

Esempio 2

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ ha raggio di convergenza 1 e non converge negli estremi $x=1$ e $x=-1$. ■
(si può usare il criterio del rapporto per esempio)

Enunciamo il seguente criterio per lo studio delle serie di potenze

Teorema 2

Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Allora si ha che $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ con la convenzione che $\begin{cases} R=0 \text{ se } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ R=+\infty \text{ se } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$

Osservazione

Un altro criterio per il calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenza si ottiene ricordando che se $\exists \lim_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, allora si ha che:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

Come conseguenza del Teorema 3 e delle osservazioni precedenti:

Teorema 4

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists\, n_* \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \neq 0 \ \forall n > n_*$. Allora se $\exists$ il limite $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R}$, tale limite coincide con il raggio di convergenza della serie.

Come conseguenza del Teorema 3 e delle osservazioni precedenti:

Teorema 4

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists\, n_* \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \neq 0 \ \forall n > n_*$. Allora se $\exists$ il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$, tale limite coincide con il raggio di convergenza della serie.

Esempio 1

Considerizmo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$. Con il criterio delle radice per serie numeriche si ha $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{3^n}} = \frac{x^2}{3}$

Come conseguenza del Teorema 3 e delle osservazioni precedenti:

Teorema 4

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists\ n_* \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \neq 0$ $\forall n > n_*$. Allora se $\exists$ il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$, tale limite coincide con il raggio di convergenza della serie.

Esempio 3

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$. Con il criterio della radice per serie numeriche si ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{3^n}} = \frac{x^2}{3}$

Quindi $\frac{x^2}{3} < 1 \iff -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ e in questo caso la serie converge.

Come conseguenza del Teorema 3 e delle osservazione precedente:

Teorema 4

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists\, n_* \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \neq 0 \ \forall n > n_*$. Allora se $\exists$ il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$, tale limite coincide con il raggio di convergenza della serie.

Esempio 2

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$. Con il criterio della radice per serie numeriche si ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{3^n}} = \frac{x^2}{3}$.

Quindi $\frac{x^2}{3} < 1 \iff -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ e in questo caso la serie converge. Sempre per il criterio della radice se $\frac{x^2}{3} > 1 \iff x < -\sqrt{3}$ oppure $x > \sqrt{3}$ allora la serie diverge.

Quindi il raggio di convergenza è $R = \sqrt{3}$

Come conseguenza del Teorema 3 e delle osservazione precedente:

Teorema 4

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ e supponiamo che $\exists\, n_* \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \neq 0$ $\forall n > n_*$. Allora se $\exists$ il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$, tale limite coincide con il raggio di convergenza della serie.

Esempio 3

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$. Con il criterio della radice per serie numeriche si ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{3^n}} = \frac{x^2}{3}$.

Quindi $\frac{x^2}{3} < 1 \iff -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ e in questo caso la serie converge. Sempre per il criterio della radice se $\frac{x^2}{3} > 1 \iff x < -\sqrt{3}$ oppure $x > \sqrt{3}$ allora la serie diverge.

Quindi il raggio di convergenza è $R = \sqrt{3}$. Inoltre, per $x^2/3 = 1 \iff x = \pm\sqrt{3}$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n \overset{\text{se } x=\pm\sqrt{3}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} 1^n = +\infty$ e la serie diverge negli estremi dell'intervallo di convergenza.

Osservazione

- Per applicare il teorema 3 (oppure il teorema 4) alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ va tenuto presente la "struttura della serie di potenze" nell'enunciato di tali risultati, ovvero

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}}_{(\mathrm{I})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{3^n} \underset{y=x^2}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{3^n}}_{(\mathrm{II})}$$

Osservazione

- Per applicare il teorema 3 (oppure il teorema 4) alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ va tenuto presente la "struttura della serie di potenze" nell'enunciato di tali risultati, ovvero

$$\underset{(\mathrm{I})}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{3^n} \underset{y=x^2}{\overset{\uparrow}{=}} \underset{(\mathrm{II})}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{3^n}}$$

e in questo caso $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \bar{R} = \frac{1}{1/3} = 3$ raggio di (II)

Osservazione

- Per applicare il teorema 3 (oppure il teorema 4) alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ va tenuto presente la "struttura della serie di potenze" nell'enunciato di tali risultati, ovvero

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}}_{(I)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{3^n} \underset{y=x^2}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{3^n}}_{(II)}$$

e in questo caso $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \bar{R} = \frac{1}{1/3} = 3$ ← raggio di (II)

quindi la serie di potenze (II) converge per $|y| < \bar{R} = 3$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 < \bar{R} = 3$$

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

e $\sqrt{3} = R$ è il raggio di convergenza per (I)

Osservazione

- Per applicare il teorema 3 (oppure il teorema 4) alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ va tenuto presente la "struttura della serie di potenze" nell'enunciato di tali risultati, ovvero

$$\underset{(\mathrm{I})}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{3^n} \underset{y=x^2}{=} \underset{(\mathrm{II})}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{3^n}}$$

e in questo caso $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} \iff \bar{R} = 1/_{1/3} = 3$ ← raggio di (II)

quindi la serie di potenze (II) converge per $|y| < \bar{R} = 3$

$$\iff x^2 < \bar{R} = 3$$

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

e $\sqrt{3} = R$ è il raggio di convergenza per (I).

- Notiamo poi che il teorema 4 non era direttamente applicabile alla serie (I), prima della trasformazione in (II), in quanto i coefficienti della serie (I) sono (l'esponente della "x" nella (I) è $2n$, pari) dati da: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{3^2} \ldots$

osservazione

- Per applicare il teorema 3 (oppure il teorema 4) alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ va tenuto presente la "struttura della serie di potenze" nell'enunciato di tali risultati, ovvero

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}}_{(\mathrm{I})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{3^n} \underset{y=x^2}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{3^n}}_{(\mathrm{II})}$$

e in questo caso $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \bar{R} = \frac{1}{1/3} = 3$ ← raggio di (II)

quindi la serie di potenze (II) converge per $|y| < \bar{R} = 3$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 < \bar{R} = 3$$

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

e $\sqrt{3} = R$ è il raggio di convergenza per (I).

- Notiamo poi che il teorema 4 non era direttamente applicabile alla serie (I), prima della trasformazione in (II), in quanto i coefficienti della serie (I) sono (l'esponente della "x" nella (I) è $2n$, pari) dati da: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{3^2}$ ...

$\Longrightarrow$ sono nulli tutti i termini a_n con n dispari e quindi $\nexists\, n_* \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \neq 0\ \forall n > n_*$